دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضیات و کاربردها

گرایش جبر

نظریه پیش‌تاب در رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب

نگارنده

فهیمه دامنی

استاد راهنما

دکتر خدیجه کشوردوست

اردیبهشت ۱۴۰۵

بسم الله الرحمن الرحیم

این کوشش کوچک را تقدیم می کنم

به پدر و مادرم

شکر و سپاس بی کران به درگاه خداوند توانمند و بخشنده که ما را به راه دانش و تحقیق رهنمون ساخت و توفیق انجام این پایان نامه را ارزانی داشت.

تشکر و قدردانی می کنم از سرکار خانم دکتر خدیجه کشوردوست که زحمت راهنمایی این پایان نامه را عهده دار گردیدند. از داوران محترم جناب آقای دکتر.... و سرکار خانم دکتر.... که زحمت داوری این پایان نامه را تقبل کردند، تشکر می کنم. از خداوند منان توفیق و کامیابی روز افزون را برای همگی شان آرزومندم.

چکیده

این پایان‌نامه به مطالعه نظریه پیش‌تاب در رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب و تعمیم آن به یک رسته دلخواه می‌پردازد. در این راستا، ابتدا ساختارهای مرتب و توپولوژی الکساندروف بیان شده و سپس رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب و رسته پایدار حاصل از آن معرفی می‌شوند. با تعریف مفاهیم پیش‌هسته و پیش‌هم‌هسته، نظریه پیش‌تاب در این رسته ارائه شده و نشان داده می‌شود که زوج رسته‌های مجموعه‌های هم‌ارزی و مجموعه‌های مرتب، یک نظریه پیش‌تاب طبیعی را تشکیل می‌دهند. در ادامه، با ساخت رسته پایدار، ارتباط این نظریه با نظریه تاب کلاسیک در رسته‌های نقطه‌دار تبیین می‌گردد. در نهایت، این مفاهیم به رسته‌های دلخواه تعمیم داده می‌شوند و چارچوبی یکپارچه برای مطالعه ساختارهای تاب‌گونه در زمینه‌های مختلف ریاضی فراهم می‌آید.

واژگان کلیدی: نظریه پیش‌تاب، مجموعه‌های پیش‌مرتب، رسته پایدار، پیش‌هسته و پیش‌هم‌هسته، توپولوژی الکساندروف.

فهرست مطالب

فصل ۱: مفاهیم پایه و مقدماتی ۱

۱-۱ مبانی نظریه رسته‌ها ۱

۱-۱-۱ تعاریف اولیه ۱

۱-۲ رسته توپولوژی ۹

۱-۲-۱ انواع خاص ریخت‌ها ۱۲

۱-۲-۲ ساختارهای جهانی ۱۲

۱-۲-۳ رسته‌های نقطه‌دار ۱۳

۱-۲-۴ هسته و هم‌هسته در رسته‌های نقطه‌دار ۱۳

۱-۲-۵ دنباله‌های دقیق ۱۴

۱-۳ نظریه تاب در رسته‌های نقطه‌دار ۱۵

۱-۳-۱ نظریه تاب ۱۵

فصل ۲: رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب و نظریه پیش‌تاب ۱۷

۲-۱ رسته مجموعه‌های مرتب ۱۷

۲-۲ رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب ۱۹

۲-۳ توپولوژی الکساندروف و مجموعه‌های پیش‌مرتب ۲۲

۲-۴ تجزیه‌پذیری در رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب ۲۶

۲-۵ پیش‌هسته و پیش‌هم‌هسته در رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب ۳۱

۲-۶ نظریه پیش‌تاب در رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب ۴۰

۲-۷ جمع‌بندی ۴۳

فصل ۳: رسته پایدار حاصل از مجموعه‌های پیش‌مرتب ۴۴
۳-۱ ساختار رسته پایدار ۴۴
۳-۲ اشیاء مینیمال و ساختار تجزیه ۴۸
۳-۳ هسته و هم‌هسته در رسته پایدار ۵۳
۳-۴ دنباله‌های دقیق در رسته پایدار ۵۸
۳-۵ جمع‌بندی ۶۲

فصل ۴: نظریه پیش‌تاب در یک رسته دلخواه ۶۳
۴-۱ نظریه پیش‌تاب در رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب ۶۳
۴-۲ پیش‌هسته و پیش‌هم‌هسته در رسته‌های کلی ۶۴
۴-۳ دنباله‌های پیش‌دقیق ۶۶
۴-۴ نظریه پیش‌تاب ۶۷
۴-۵ ارتباط با نظریه‌های تاب کلاسیک ۶۹
۴-۶ جمع‌بندی ۷۰

کتاب‌نامه ۷۲

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۷۶

پیش‌گفتار

نظریه رسته‌ها که در میانه قرن بیستم توسط ساموئل آیلنبرگ و ساندرز مک‌لین معرفی شد [۱۵]، امروزه نه تنها در ریاضیات محض، بلکه در علوم کامپیوتر، فیزیک نظری و منطق نیز کاربردهای گسترده‌ای یافته است. یکی از مفاهیم محوری در نظریه رسته‌ها، ساختارهای مرتب و به ویژه مجموعه‌های پیش‌مرتب است که تعمیم طبیعی‌ای از روابط هم‌ارزی و ترتیب‌های جزیی به شمار می‌روند. مطالعه نظام‌مند ساختارهای مرتب به قرن نوزدهم بازمی‌گردد، اما صورت‌بندی مدرن آن در آثار برت [۷] و دیگران شکل گرفته است.

از سوی دیگر، نظریه تاب که ریشه در کارهای دیرسون [۱۳] و گولد [۲۰] دارد، به عنوان ابزاری قدرتمند برای تجزیه و تحلیل ساختارهای جبری در رسته‌های نقطه‌دار شناخته می‌شود. این نظریه ابتدا در رسته گروه‌های آبلی و سپس در رسته مدول‌ها بر روی حلقه‌ها توسعه یافت. مفهوم کلاسیک نظریه تاب برای رسته‌های نقطه‌دار تعریف می‌شود و بر وجود شیء صفر و مفاهیم هسته و هم‌هسته استوار است.

ارتباط عمیق بین نظریه ترتیب و توپولوژی نیز از دیرباز مورد توجه ریاضیدانان بوده است. پاول الکساندروف در سال ۱۹۳۷ با معرفی فضاهای الکساندروف‑گسسته [۴]، پلی بین این دو حوزه ایجاد کرد و نشان داد که بین رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب و رسته فضاهای توپولوژی الکساندروف‑گسسته یک یکریختی رسته‌ای طبیعی برقرار است. این ارتباط به ما امکان می‌دهد از ابزارهای توپولوژیکی برای مطالعه ساختارهای مرتب استفاده کنیم.

در سال‌های اخیر، مفاهیم جدیدی در نظریه رسته‌ها، جبر مرتب و توپولوژی شکل گرفته‌اند. از جمله این مفاهیم می‌توان به «نظریه پیش‌تاب» اشاره کرد که توسط فاچینی و فینوکیارو [۱۶] معرفی شد و هدف آن تعمیم نظریه تاب کلاسیک به رسته‌هایی است که لزوماً نقطه‌دار نیستند. این تعمیم

با جایگزینی مفهوم «ریخت صفر» با مفهوم «ریخت بدیهی» نسبت به یک کلاس خاص از اشیاء صورت می‌گیرد و امکان به کارگیری ایده‌های نظریه تاب را در حوزه‌های گسترده‌تری فراهم می‌آورد.

مطالعه نظریه پیش‌تاب در رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب از چند جهت حائز اهمیت است. نخست آن‌که، مجموعه‌های پیش‌مرتب یکی از ساده‌ترین و در عین حال پرکاربردترین ساختارهای مرتب در ریاضیات و علوم کامپیوتر هستند. این ساختارها به طور طبیعی در نظریه تصمیم‌گیری، منطق‌های غیرکلاسیک و مبانی علوم کامپیوتر ظاهر می‌شوند.

دوم آن‌که، نظریه پیش‌تاب به عنوان تعمیم نظریه تاب کلاسیک، امکان انتقال روش‌ها و نتایج از حوزه جبری به حوزه ساختارهای مرتب را فراهم می‌آورد. این انتقال نه تنها غنای مفهومی هر دو حوزه را افزایش می‌دهد، بلکه ممکن است به کشف ارتباطات جدید و نتایج غیرمنتظره منجر شود. به ویژه، کار فاچینی و فینوکیارو [۱۶] که نشان داد زوج $(\mathbf{Equiv}, \mathbf{ParOrd})$ یک نظریه پیش‌تاب طبیعی در رسته $\mathbf{Preord}$ تشکیل می‌دهد، نقطه آغاز مهمی برای تحقیقات بعدی در این زمینه بوده است.

سوم آن‌که، ساختار رسته پایدار $\underline{\mathbf{Preord}}$ که از هم‌ارزی ریخت‌ها نسبت به زیرمجموعه‌های بسته ــ باز به دست می‌آید، خود موضوع جالبی برای مطالعه است. این رسته نه تنها نقطه‌دار می‌شود، بلکه بسیاری از ساختارهای یکریختی در آن ساده‌تر شده و امکان تحلیل دقیق‌تری از دنباله‌های دقیق و مفاهیم مرتبط فراهم می‌آورد.

هدف اصلی تدوین این پایان‌نامه، بررسی نظام‌مند نظریه پیش‌تاب در رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب و توسعه مفاهیم مرتبط با آن است. هدف این است که با ترکیب ابزارهای نظریه رسته‌ها، توپولوژی الکساندروف و نظریه ترتیب، درک جامعی از ساختار این رسته و نظریه پیش‌تاب مرتبط با آن به دست آید. همچنین، مطالعه رسته پایدار حاصل از این ساختار و تحلیل دقیق یکریختی‌ها، هسته‌ها، هم‌هسته‌ها و دنباله‌های دقیق در این چهارچوب، از اهداف مهم این پژوهش به شمار می‌روند.

این پایان‌نامه در چهار فصل اصلی سازماندهی شده است.

فصل اول به مرور مبانی نظری لازم برای درک مطالب فصل‌های بعد اختصاص دارد. در ابتدا، تعاریف اولیه نظریه رسته‌ها شامل رسته، ریخت، تکریختی، بروریختی، یکریختی و ساختارهای جهانی مانند ضرب و هم‌ضرب ارائه می‌شود. سپس، مفاهیم مرتبط با مجموعه‌های پیش‌مرتب، ترتیب‌های جزیی و کلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه، توپولوژی الکساندروف و ارتباط عمیق

آن با مجموعه‌های پیش‌مرتب مطالعه می‌شود. بخش پایانی این فصل به معرفی نظریه تاب کلاسیک در رسته‌های نقطه‌دار و مفاهیم هسته، هم‌هسته و دنباله‌های دقیق می‌پردازد.

فصل دوم هسته اصلی پایان‌نامه را تشکیل می‌دهد. در این فصل، ابتدا رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب **Preord** به طور دقیق مطالعه می‌شود و زیررسته‌های مهم آن مانند **ParOrd** و **Equiv** معرفی می‌گردند. سپس، ارتباط بین مجموعه‌های پیش‌مرتب و فضاهای توپولوژی الکساندروف‌ـ گسسته مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش بعدی، مفهوم رسته پایدار $\underline{\mathbf{Preord}}$ به عنوان رسته خارج قسمتی **Preord** نسبت به یک رابطه هم‌ارزی طبیعی معرفی شده و ویژگی‌های آن مطالعه می‌شود. در نهایت، نظریه پیش‌تاب با زوج $(\mathbf{Equiv}, \mathbf{ParOrd})$ در رسته **Preord** معرفی شده و مثال‌های متعددی برای درک بهتر آن ارائه می‌گردد. همچنین، مفاهیم پیش‌هسته و پیش‌هم‌هسته در این رسته به تفصیل بررسی می‌شوند.

فصل سوم به مطالعه عمیق‌تر رسته پایدار $\underline{\mathbf{Preord}}$ و ساختارهای یکریختی در آن اختصاص دارد. ابتدا، ساختار دقیق این رسته به عنوان یک رسته نقطه‌دار بررسی می‌شود. سپس، مفهوم اشیاء مینیمال و ساختار تجزیه آن‌ها مورد تحلیل قرار می‌گیرد. در ادامه، ویژگی‌های کلیدی یکریختی‌ها در این رسته، از جمله شرایط لازم و کافی برای تکریختی و بروریختی بودن، مطالعه می‌شود. بخش مهم دیگری از این فصل به بررسی هسته، هم‌هسته و دنباله‌های دقیق در رسته پایدار می‌پردازد و نشان می‌دهد که چگونه پیش‌هسته و پیش‌هم‌هسته‌های رسته **Preord** به هسته و هم‌هسته‌های واقعی در رسته پایدار تبدیل می‌شوند. در پایان، تمام دنباله‌های دقیق کوتاه در این رسته تا حد یکریختی توصیف می‌شوند.

فصل چهارم به تعمیم مفاهیم معرفی شده به رسته‌های دلخواه اختصاص دارد. در ابتدا، مفهوم ریخت‌های $\mathcal{Z}$ـ بدیهی نسبت به یک کلاس خاص از اشیاء تعریف می‌شود. سپس، مفاهیم $\mathcal{Z}$ـ پیش‌هسته و $\mathcal{Z}$ـ پیش‌هم‌هسته در یک رسته کلی معرفی شده و ویژگی‌های آن‌ها مطالعه می‌شود. در ادامه، دنباله‌های $\mathcal{Z}$ـ پیش‌دقیق و نظریه پیش‌تاب عمومی تعریف می‌گردد. قضیه‌ای برای تشخیص اشیاء تاب و آزاد ارائه شده و ارتباط این نظریه با نظریه تاب کلاسیک در رسته‌های نقطه‌دار مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل ۱

مفاهیم پایه و مقدماتی

نظریه رسته‌ها، به عنوان زبانی قدرتمند و در ریاضیات مدرن، امکان بیان یکپارچه‌ای از ساختارهای جبری ، توپولوژی و ساختارهای مرتب را فراهم می‌آورد. این چارچوب، که توسط ساموئل آیلنبرگ وساندرز مک‌لین در دهه ۱۹۴۰ معرفی شد [۱۵]، امروزه به ابزار اساسی در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات محض و کاربردی تبدیل شده است.

در این فصل، مبانی نظری لازم برای فصل‌های آتی را بیان می‌کنیم. ابتدا به معرفی اجمالی نظریه رسته‌ها می‌پردازیم، سپس مفاهیم مرتبط با مجموعه‌های پیش‌مرتب، توپولوژی الکساندروف و نظریه تاب کلاسیک را مرور می‌کنیم. این مفاهیم ابزار ضروری برای درک نظریه پیش‌تاب و رسته پایدار مجموعه‌های پیش‌مرتب هستند که در سایر فصل‌ها مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۱–۱ مبانی نظریه رسته‌ها

۱–۱–۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱–۱–۱. یک **رسته** $\mathcal{C}$ شامل موارد زیر است:

۱. یک کلاس $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ از **اشیاء**.

۲. برای هر دو شیء $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$، یک مجموعه $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ از **ریخت‌ها** از A به B.

۳. برای هر سه شیء $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$، یک تابع ترکیب

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

۴. برای هر شیء $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$، یک ریخت همانی $۱_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$

به طوری که شرایط زیر برقرار باشند:

۱. **شرکت‌پذیری:** برای هر $f : A \to B$، $g : B \to C$ و $h : C \to D$،

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

۲. **خاصیت همانی:** برای هر $f : A \to B$،

$$f \circ ۱_A = f = ۱_B \circ f.$$

این تعریف پایه‌ای، در کتاب کلاسیک مک‌لین [۲۷] به تفصیل آمده است.

مثال ۱-۱-۲ (رسته‌های متناهی). هر گراف جهت‌دار که در آن ترکیب مسیرها تعریف شده و دارای یال همانی باشد، یک رسته تشکیل می‌دهد. برای نمونه، رسته $\mathcal{M}$ را با دو شیء A و B و تنها دو ریخت غیرهمانی $f : A \to B$ و $g : B \to A$ در نظر بگیرید که در آن $g \circ f = ۱_A$ و $f \circ g = ۱_B$. [۲۷].

مثال ۱-۱-۳. برخی از رسته‌های مهم عبارتند از:

- **Set**: رسته مجموعه‌ها و توابع
- **Top**: رسته فضاهای توپولوژی و توابع پیوسته
- **Grp**: رسته گروه‌ها و هم‌ریختی‌های گروهی

- $\mathbf{Ab}$: رسته گروه‌های آبلی و هم‌ریختی‌های گروهی
- $\mathbf{Vect}_k$: رسته فضاهای برداری روی میدان k و تبدیل‌های خطی

تعریف ۱-۱-۴. فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته باشد. رسته $\mathcal{D}$ را زیررسته $\mathcal{C}$ می‌نامیم اگر

الف) $Obj\ \mathcal{D} \subseteq Obj\ \mathcal{C}$ و $Hom(\mathcal{D}) \subseteq Hom(\mathcal{C})$.

ب) توابع Dom، $Codom$، I و O در $\mathcal{D}$ تحدید همتاهایشان در رسته $\mathcal{C}$ باشند.

در نتیجه، برای هر $A, B \in \mathcal{C}$، $Hom_{\mathcal{D}}(A,B) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$، $I_{\mathcal{D}}(A) = I_{\mathcal{C}}(A)$ و برای هر $f, g \in \mathcal{D}$، اگر $g \circ_{\mathcal{D}} f$ بامعنی باشد، آنگاه $g \circ_{\mathcal{D}} f = g \circ_{\mathcal{C}} f$.

زیررسته $\mathcal{D}$ از رسته $\mathcal{C}$ را زیررسته پر یا زیررسته تمام می‌نامیم اگر برای هر دو شی A و B متعلق به رسته $\mathcal{D}$، تساوی $Hom_{\mathcal{D}}(A,B) = Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ برقرار باشد.

مثال ۱-۱-۵. ۱) بدیهی است که هر رسته، زیررسته پر خودش است.

۲) رسته $\mathbf{FSet}$ زیررسته پر رسته $\mathbf{Set}$ است.

۳) رسته مجموعه‌ها و توابع یک‌به‌یک بین آن‌ها، زیررسته رسته $\mathbf{Set}$ است که پر نیست. به همین ترتیب، رسته مجموعه‌ها و توابع پوشای بین آن‌ها، و رسته مجموعه‌ها و توابع دوسویی بین آن‌ها زیررسته پر رسته $\mathbf{Set}$ نیستند.

تعریف ۱-۱-۶. فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته باشد. دوگان رسته $\mathcal{C}$ را، که با نمادهای $\mathcal{C}^{op}$، C^d یا C^* نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

الف) $Obj\, \mathcal{C}^{op} = Obj\, \mathcal{C}$.

ب) برای هر دو شی A و B، $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) = Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$، به این معنی که برای هر ریخت $f : A \to B$ در $\mathcal{C}$ یک و فقط یک ریخت در $\mathcal{C}^{op}$ وجود دارد، که آن را به صورت $f^{op} : B \to A$ نشان می‌دهیم. روشن است که $(f^{op})^{op} = f$.

پ) در مورد توابع دامنه، هم‌دامنه، ترکیب، ریخت‌های همانی در $\mathcal{C}^{op}$، داشته باشیم:

$$Dom\ f^{op} = Codom\ f,\ Codom\ f^{op} = Dom\ f,\ f^{op} \circ_{\mathcal{C}} g^{op} = (g \circ_{\mathcal{C}} f)^{op},\ I_{\mathcal{C}^{op}}(A) = I_{\mathcal{C}}(A).$$

تعریف ۱-۱-۷. رسته $\mathcal{C}$ را

الف) موضعی‌ـ کوچک می‌نامیم اگر برای هر دو شی A و B، $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ مجموعه باشد،

ب) کوچک می‌نامیم اگر موضعی‌ـ کوچک باشد و رده اشیای آن نیز مجموعه باشد،

پ) بزرگ می‌نامیم اگر کوچک نباشد،

ت) گسسته می‌نامیم اگر تنها ریختی‌های آن، همانی‌ها باشند، یعنی برای هر $A, B \in Obj\ \mathcal{C}$،

$$Hom(A, B) = \begin{cases} \{id_A\} & A = B \text{ اگر} \\ \emptyset & A \neq B \text{ اگر} \end{cases}$$

تعریف ۱-۱-۸. الف) شیء T در رسته‌ی $\mathcal{C}$ را شیء پایانی می‌گوییم، هرگاه برای هر $A \in Obj(\mathcal{C})$، مجموعه $Hom_{\mathcal{C}}(A, T)$ تک‌عضوی باشد.

ب) شیء I در رسته $\mathcal{C}$ را شیء آغازین می‌گوییم، هرگاه برای هر $A \in Obj(\mathcal{C})$، مجموعه‌ی $Hom_{\mathcal{C}}(I, A)$ تک‌عضوی باشد.

تعریف ۱-۱-۹. فرض کنید $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از اشیای رسته $\mathcal{C}$ باشد. حاصل‌ضرب این خانواده را با $\prod_{i \in I} A_i$ نشان می‌دهیم و عبارت است از شی‌ای در $\mathcal{C}$ به همراه خانواده‌ای از ریخت‌ها مانند $\{\pi_j : \prod_{i \in I} A_i \to A_j\}_{j \in I}$ که دارای خاصیت جهانی حاصل‌ضرب است، یعنی اگر شیء دیگری مانند A به همراه خانواده $\{g_i : A \to A_i\}_{i \in I}$ از ریخت‌ها موجود باشد، آنگاه ریخت منحصربفرد $g : A \to \prod_{i \in I} A_i$ وجود دارد که برای هر $i \in I$، $g_i = \pi_i \circ g$.

تعریف ۱-۱-۱۰. فرض کنید $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از اشیای رسته $\mathcal{C}$ باشد. هم‌ـ حاصل‌ضرب این خانواده را با $\coprod_{i \in I} A_i$ نشان می‌دهیم و عبارت است از شی‌ای در $\mathcal{C}$ به همراه خانواده‌ای از ریخت‌ها

$\{\iota_j : A_j \to \coprod_{i\in I} A_i\}_{j\in I}$ که دارای خاصیت جهانی هم‌ـحاصل‌ضرب است، یعنی اگر شی دیگری مانند A به همراه خانواده $\{f_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ از ریخت‌ها موجود باشد، آن‌گاه ریخت منحصربفرد $h : \coprod_{i\in I} A_i \to A$ وجود دارد که برای هر $i \in I$، $h \circ \iota_j = f_j$.

تعریف ۱-۱-۱۱. دو ریخت موازی دلخواه $f, g : A \to B$ را در رسته $\mathcal{C}$ در نظر می‌گیریم. زوج (E, eq) را که در آن E یک شی و $eq : E \to A$ ریختی در رسته $\mathcal{C}$ است، برابرساز یا (از چپ برابرساز) f و g در $\mathcal{C}$ می‌نامیم اگر

(۱) ریخت eq زوج ریخت (f, g) را (از چپ) برابر سازد، یعنی $f \circ eq = g \circ eq$.

(۲) برای هر ریخت $h : C \to A$ که زوج (f, g) را (از چپ) برابر سازد، یعنی، $f \circ h = g \circ h$، ریخت منحصربه‌فرد $\overline{h} : C \to E$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $h = eq \circ \overline{h}$.

در این صورت می‌نویسیم $(E, eq) = Eq(f, g)$ و $\overline{h}$ را ریخت القایی برابرساز توسط h می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۱۲. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته و $f, g : A \to B$ دو ریخت در این رسته باشند. زوج (co, C) را که در آن C یک شی و $co : B \to C$ ریختی در رسته $\mathcal{C}$ است، هم‌برابرساز یا (از راست هم‌برابرساز) f و g در $\mathcal{C}$ می‌نامیم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

(۱) $co \circ f = co \circ g$.

(۲) خاصیت جهانی: برای هر ریخت $k : B \to D$ با شرط $k \circ f = k \circ g$، ریخت منحصربه‌فرد $\overline{k} : \mathcal{C} \to D$ وجود داشته باشد که $\overline{k} \circ co = k$.

در این صورت می‌نویسیم $(co, C) = coeq(f, g)$ و k را ریخت القایی هم‌برابرساز توسط k می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۱۳. الف) رسته $\mathcal{C}$ دارای برابرسازهاست اگر برابرساز هر زوج ریخت $f, g : A \to B$ در $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد.

ب) رسته $\mathcal{C}$ دارای هم‌برابرسازهاست اگر هم‌برابرساز هر زوج ریخت $f, g : A \to B$ در $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد.

قضیه ۱-۱-۱۴. (قضیه ۸.۲۳، [۲])

الف) رسته $\mathcal{C}$، کامل است اگر و تنها اگر $\mathcal{C}$ دارای ضرب‌های دلخواه و برابرسازها باشد.

ب) *رسته $\mathcal{C}$، هم‌کامل است اگر و تنها اگر $\mathcal{C}$ دارای هم‌ضرب‌های دلخواه و هم‌برابرسازها باشد.*

تعریف ۱-۱-۱۵. ریخت $f : A \to B$ در رسته $\mathcal{C}$، یکریختی است هرگاه ریخت $g : B \to A$ در رسته $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد که $f \circ g = id_B$ و $g \circ f = id_A$.

در این صورت، می‌گوییم A و B یکریخت هستند و با $A \cong B$ نشان می‌دهیم.

ملاحظه ۱-۱-۱۶. ۱) *توجه می‌کنیم که وارون یکریختی منحصربه‌فرد است. در واقع، اگر $g, h : B \to A$ وارون $f : A \to B$ باشند، آن‌گاه*

$$g = g \circ id_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_A \circ h = h.$$

از این رو، از نماد f^{-1} برای وارون f استفاده می‌کنیم.

۲) *روشن است که، ریخت‌های همانی یکریختی هستند.*

۳) *اگر وارون ریخت $f : A \to B$ در رسته $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $(f^{-1})^{-1} = f$.*

۴) *اگر ریخت‌های f و g یکریختی باشند و ترکیب $g \circ f$ بامعنی باشد، آن‌گاه ریخت $g \circ f$ یکریختی است. در واقع، $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$، که در آن وارون‌ها، بنا به تعریف یکریختی، وجود دارند.*

تعریف ۱-۱-۱۷. فرض کنید $\mathcal{C}$ رسته‌ای دلخواه و $f : A \to B$ ریختی در $\mathcal{C}$ باشد.

الف) f را تکریختی می‌نامیم اگر، در ترکیب، از چپ حذف‌پذیر باشد. یعنی، برای هر دو ریخت $g, h : C \to A$ در رسته $\mathcal{C}$، خاصیت $f \circ g = f \circ h \Longrightarrow g = h$ برقرار باشد.

ب) f را بروریختی می‌نامیم اگر، در ترکیب، از راست حذف‌پذیر باشد. یعنی، برای هر دو ریخت $g, h : B \to C$ در رسته $\mathcal{C}$، خاصیت $g \circ f = h \circ f \Longrightarrow g = h$ برقرار باشد.

لم ۱-۱-۱۸. *در هر رسته ملموس ریخت‌های یک‌به‌یک، تکریختی هستند.*

اثبات. فرض کنیم $f : A \to B$ یک ریخت یک‌به‌یک (تابع یک‌به‌یک) در رسته ملموس $\mathcal{C}$ باشد. همچنین، فرض می‌کنیم برای هر شی $C \in \mathcal{C}$ (که یک مجموعه احتمالا با یک ساختار است) و هر

دو ریخت (توابعی که حافظ ساختار مربوطه هستند) $g, h : C \to A$ داریم $f \circ g = f \circ h$. چون f یک‌به‌یک است و برای هر $x \in A$، داریم $f(g(x)) = f(h(x))$، نتیجه می‌گیریم $g(x) = h(x)$. پس $g = h$. $\square$

لم ۱-۱-۱۹. *در هر رسته ملموس ریخت‌های پوشا، بروریختی هستند.*

اثبات. فرض کنیم $f : A \to B$ یک تابع پوشا در رسته ملموس $\mathcal{C}$ باشد. همچنین، فرض می‌کنیم برای هر شی $C \in \mathcal{C}$ (که یک مجموعه احتمالا با یک ساختار است) و هر دو ریخت (توابعی که حافظ ساختار مربوطه هستند) $g, h : B \to C$ داریم $g \circ f = h \circ f$. چون f پوشا است، برای هر $y \in B$ عضو $x \in A$ وجود دارد که $f(x) = y$. پس برای هر $y \in B$، $g(y) = g(f(x)) = h(f(x)) = h(y)$. $\square$

تعریف ۱-۱-۲۰. فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. یک تابعگون همورد (تابعگون پادورد) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ تابعی است که

الف) به هر شیء $A \in Obj(\mathcal{C})$ یک شیء $F(A) \in Obj(\mathcal{D})$ نظیر کند. به بیان دیگر، اگر A شی‌ای از $\mathcal{C}$ باشد، $F(A)$ شی‌ای از $\mathcal{D}$ است.

ب) برای هر ریخت $f : A \to B$ در $\mathcal{C}$، یک ریخت $Ff : F(A) \to F(B)$ (ریخت $F(f) : F(B) \to F(A)$) در $\mathcal{D}$ نظیر کند به‌طوری‌که:

(۱) برای هر $A \in Obj(\mathcal{C})$ داریم $F(id_A) = id_{F(A)}$.

(۲) برای هر دو ریخت $f : A \to B$ و $g : B \to C$ در $\mathcal{C}$، $F(gf) = F(g)F(f)$ ($F(gf) = F(f)F(g)$).

مثال ۱-۱-۲۱. تابعگون ثابت: اگر $\mathcal{C}$ یک رسته دلخواه باشد. آن‌گاه تابعگون $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ به‌طوری‌که برای هر $A \in Obj(\mathcal{C})$، $F(A) = A$ و برای هر ریخت $f : A \to B$ در $\mathcal{C}$، $F(f) = f$ تابعگون ثابت است.

تعریف ۱-۱-۲۲. فرض کنید $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ یک تابعگون باشد. در این صورت، تابعگون F را باوفا یا صادق می‌نامیم اگر تابع

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, A') \to Hom_{\mathcal{D}}(FA, FA')$$

برای هر $A, A' \in \mathcal{C}$، یک‌به‌یک باشد. به عبارت دیگر، اگر برای $f, g : A \to A'$، $Ff = Fg : FA \to FA'$، آن‌گاه $f = g$.

تعریف ۱-۱-۲۳. اگر $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ و $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ دو تابعگون (هموردا) باشند طوری که یکریختی طبیعی $Hom_{\mathcal{D}}(F-, -) \cong Hom_{\mathcal{C}}(-, G-)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه F را (که در طرف چپ در Hom قرار دارد) الحاقی چپ G و G را (که در طرف راست در Hom قرار دارد) الحاقی راست F می‌نامیم. همچنین (F, G) را یک زوج الحاقی می‌گوییم و می‌نویسیم $F \dashv G$.
توجه می‌کنیم که طبیعی بودن یکریختی $Hom_{\mathcal{D}}(F-, -) \cong Hom_{\mathcal{C}}(-, G-)$ به این معنی است که برای هر $A \in \mathcal{C}$ و $B \in \mathcal{D}$ یکریختی

$$\alpha_{A,B} : Hom_{\mathcal{D}}(FA, B) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, GB)$$

وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $h : A \to A'$ و $k : B' \to B$ نمودار زیر جابه‌جایی باشد، یعنی، $Hom_{\mathcal{C}}(h, Gk) \circ \alpha_{A',B'} = \alpha_{A,B} \circ Hom_{\mathcal{D}}(Fh, k)$.

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{D}}(FA', B') \arrow[r, "\alpha_{A',B'}"] \arrow[d, "Hom_{\mathcal{D}}(Fh,k)"'] & Hom_{\mathcal{C}}(A', GB') \arrow[d, "Hom_{\mathcal{C}}(h,Gk)"] \\
Hom_{\mathcal{D}}(FA, B) \arrow[r, "\alpha_{A,B}"] & Hom_{\mathcal{C}}(A, GB)
\end{tikzcd}$$

مثال ۱-۱-۲۴. فرض کنید X یک مجموعه باشد. تابعگون‌های ضرب و ریخت

$$- \times X : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set},\ (-)^X = Hom_{\mathbf{Set}}(X, -) : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$$

در نظر بگیریم. در این صورت $- \times X \dashv (-)^{\times}$.

زیرا برای هر دو مجموعه A و B، $Hom_{\mathbf{Set}}(A \times X, B) \cong Hom_{\mathbf{Set}}(A, B^X)$.

قضیه ۱-۱-۲۵. [۲] *تابعگون $G : \mathcal{D} \to C$ دارای الحاقی چپ است اگر و تنها اگر برای هر شی A در رسته $\mathcal{C}$، شی B_A و ریخت $f_A : A \to GB_A$ در رسته $\mathcal{D}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر شی B و هر ریخت $f : A \to GB$ در $\mathcal{D}$، ریخت منحصربه‌فرد $g_f : B_A \to B$ وجود داشته*

باشد به‌طوری‌که $f = Gg_f \circ f_A$.

تعریف ۱-۱-۲۶. فرض کنید $\mathcal{D}$ زیررسته $\mathcal{C}$ باشد. در این صورت، زیررسته

الف) زیررسته $\mathcal{D}$، انعکاسی رسته $\mathcal{C}$ است اگر تابعگون شمولی $i : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ دارای الحاقی چپ باشد.

ب) زیررسته $\mathcal{D}$، هم‌انعکاسی رسته $\mathcal{C}$ است اگر تابعگون شمولی $i : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ دارای الحاقی راست باشد.

۱-۲ رسته توپولوژی

در این بخش، مقدمات مورد نیاز از یک فضای توپولوژی را بیان می‌کنیم. برای مطالعه بیشتر می‌توانید مرجع [۲۹] را ببینید.

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. خانواده $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ یک توپولوژی بر روی X است هرگاه،

الف) τ شامل مجموعه‌های $\emptyset$ و X باشد،

ب) τ شامل هر تعداد دلخواه از زیرمجموعه‌های موجود در آن باشد، یعنی، برای هر $\{X_\alpha\}_\alpha \subseteq \tau$، $\bigcup_\alpha X_\alpha \in \tau$.

پ) اشتراک هر دو عضو τ عضو τ باشد.

دوتایی (X, τ) را یک فضای توپولوژی می‌نامیم. هر عضو توپولوژی را یک مجموعه باز می‌گوییم.

ملاحظه ۱-۲-۲. *اگر (X, τ) یک فضای توپولوژی باشد، آن‌گاه $Y \subseteq X$ در X بسته است هرگاه،* $Y^c = X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\} \in \tau$.

مثال ۱-۲-۳. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. در این‌صورت،

۱) مجموعه $\{\emptyset, X\}$ یک توپولوژی بر روی X است. این توپولوژی را توپولوژی ناگسسته می‌نامند.

۲) مجموعه $\mathcal{P}(X)$ یک توپولوژی بر روی X است. این توپولوژی را توپولوژی گسسته می‌نامند.

۳) اگر $X = \{0, 1\}$، آنگاه $\tau = \{\emptyset, \{1\}, X\}$ یک توپولوژی بر روی X است. این توپولوژی به توپولوژی سیرپنسکی معروف است.

۴) مجموعه $\mathcal{P}_{\text{cof}}(X) \doteq \{A \subseteq X \mid X \setminus A$ متناهی است$\} \cup \{\emptyset\}$ یک توپولوژی بر روی X است. این توپولوژی را توپولوژی هم‌متناهی می‌نامند.

تعریف ۱-۲-۴. یک فضای توپولوژی (X, τ) را **الکساندروف‌ـ گسسته** می‌نامیم اگر اشتراک هر خانواده‌ای از مجموعه‌های باز در X، باز باشد.

هر فضای توپولوژی متناهی، توپولوژی الکساندروف است. مثال زیر مثالی است از یک فضای توپولوژی که توپولوژی الکساندروف نیست.

مثال ۱-۲-۵. فضای اعداد حقیقی با توپولوژی معمولی را در نظر می‌گیریم. برای هر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$، بازه‌های $U_n = (-1/n, 1/n)$ باز هستند. اما اشتراک دلخواه این بازه‌ها $\bigcap_n U_n = \{0\}$ باز نیست.

تعریف ۱-۲-۶. فرض کنید (X, τ_X) و (Y, τ_Y) دو فضای توپولوژی باشند. در این‌صورت، یک تابع پیوسته $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ عبارت است از تابع $f : X \to Y$ به‌طوری‌که برای هر $U \in \tau_Y$، $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

مثال ۱-۲-۷. فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژی باشد. در این‌صورت،

۱) تابع همانی $id_X : X \to X$ را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت، $id_{(X,\tau)} : (X, \tau) \to (X, \tau)$ یک تابع پیوسته همانی است.

۲) اگر $f : Y \to X$ تابع باشد، آنگاه $f : (Y, \mathcal{P}(Y)) \to (X, \tau)$ یک تابع پیوسته است.

۳) اگر $f : X \to Y$ تابع باشد، آنگاه $f : (X, \tau) \to (Y, \{\emptyset, Y\})$ یک تابع پیوسته است.

ملاحظه ۱-۲-۸. *ترکیب توابع پیوسته، یک تابع پیوسته است.*

تعریف ۱-۲-۹. فضاهای توپولوژی به‌همراه توابع پیوسته بین آن‌ها با عمل ترکیب توابع و توابع پیوسته همانی تشکیل یک رسته می‌دهند که آن را با **Top** نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱-۲-۱۰. *فرض کنید (Y, τ_Y) یک فضای توپولوژی و $f : X \to Y$ تابع باشد. در این‌صورت، $\tau = \{f^{-1}(V) \mid V \in \tau_Y\}$ یک توپولوژی بر روی X است.*

اثبات. با توجه به خاصیت‌های f^{-1} روابط زیر را داریم،

۱) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$،

۲) $f^{-1}(Y) = X$،

۳) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$،

۴) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

پس τ یک توپولوژی است. $\square$

ملاحظه ۱-۲-۱۱. *اگر (X, τ) یک فضای توپولوژی باشد و $Y \subseteq X$، آن‌گاه تحدید توپولوژی τ بر روی Y که به صورت $\tau|_Y = \{Y \cap A \mid A \in \tau\}$ تعریف می‌شود، یک توپولوژی بر روی Y است. دوتایی $(Y, \tau|_Y)$ را زیرفضای توپولوژی (X, τ) می‌گوییم.*

لم ۱-۲-۱۲. *فرض کنید (X, τ_X) و (Y, τ_Y) دو فضای توپولوژی باشند. در این‌صورت، تابع پیوسته، یک به یک و پوشای $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ را یکریختی توپولوژی (همسان‌ریخت، همیومورفیسم، همریختی توپولوژی) می‌گوییم، هرگاه تابع وارون $f^{-1} : (Y, \tau_Y) \to (X, \tau_X)$ یک تابع پیوسته باشد.*

مثال ۱-۲-۱۳. تابع پیوسته $id : (X, \mathcal{P}(X)) \to (X, \{\emptyset, X\})$ یکریختی توپولوژی نیست.

تعریف ۱-۲-۱۴. فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژی باشد و $\mathcal{B} \subseteq \tau$. در این‌صورت، $\mathcal{B}$ را یک پایه برای توپولوژی τ می‌گوییم هرگاه هر عضو ناتهی از τ اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ باشد.

۱-۲-۱ رسته‌های نقطه‌دار

تعریف ۱-۲-۱۵. یک رسته $\mathcal{C}$ را **نقطه‌دار** می‌نامیم اگر:

۱. دارای یک **شیء صفر** 0 باشد.

۲. برای هر دو شیء A و B، یک **ریخت صفر** $0_{A,B} : A \to B$ وجود داشته باشد که از ترکیب ریخت‌های یکتا به 0 و از 0 به B به دست آید.

مثال ۱-۲-۱۶. رسته‌های $\mathbf{Grp}$، $\mathbf{Ab}$، $\mathbf{Vect}_k$ و $\mathbf{Top}_*$ (فضاهای توپولوژیک نقطه‌دار) همگی رسته‌های نقطه‌دار هستند.

رسته‌های نقطه‌دار، در مطالعه نظریه تاب کلاسیک به‌کار می‌روند [۸].

۱-۲-۲ هسته و هم‌هسته در رسته‌های نقطه‌دار

تعریف ۱-۲-۱۷. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته نقطه‌دار و $f : A \to B$ یک ریخت در $\mathcal{C}$ باشد.

۱. **هسته** f، زوج (K, k) است که در آن $K \in \mathcal{C}$ و $k : K \to A$ یک ریخت است به طوری که:

الف) $f \circ k = 0$،

ب) برای هر ریخت $k' : K' \to A$ با $f \circ k' = 0$، ریخت یکتای $u : K' \to K$ وجود دارد که $k' = k \circ u$.

۲. **هم‌هسته** f، یک ریخت $c : B \to C$ است به طوری که:

الف) $c \circ f = 0$،

ب) برای هر ریخت $c' : B \to C'$ با $c' \circ f = 0$، ریخت یکتای $v : C \to C'$ وجود دارد که $c' = v \circ c$.

مثال ۱-۲-۱۸ (هسته و هم‌هسته در رسته گروه‌ها). در رسته $\mathbf{Grp}$، هسته و هم‌هسته یک همریختی گروهی $\phi : G \to H$ به صورت کلاسیک تعریف می‌شوند:

- $\ker(\phi) = \{g \in G \mid \phi(g) = e_H\}$ به همراه همریختی شامل.
- $\operatorname{coker}(\phi) = H/\overline{\phi(G)}$، یعنی خارج‌قسمت H بر حسب بستار نرمال $\phi(G)$ در H، به همراه همریختی تصویر.

به طور خاص، اگر ϕ پوشا باشد، $\operatorname{coker}(\phi)$ گروه بدیهی است.

۱-۲-۳ دنباله‌های دقیق

تعریف ۱-۲-۱۹. در یک رسته نقطه‌دار $\mathcal{C}$، دنباله‌ای از ریخت‌ها

$$\cdots \to A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \to \cdots$$

را **دقیق** در A_i می‌نامیم اگر:

۱. $f_i \circ f_{i-1} = 0$ (ترکیب دو ریخت متوالی، ریخت صفر است).

۲. برای هر شیء X و هر ریخت $g : X \to A_i$ به طوری که $f_i \circ g = 0$، ریخت یکتای $h : X \to A_{i-1}$ وجود دارد به طوری که $g = f_{i-1} \circ h$.

به عبارت دیگر، f_{i-1} باید یک **هسته** برای f_i باشد.

اگر دنباله در تمام مواضع A_i دقیق باشد، آن را یک **دنباله دقیق** می‌نامیم.

تعریف ۱-۲-۲۰. دنباله

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

را یک **دنباله دقیق کوتاه** می‌نامیم اگر:

۱. f یک تکریختی باشد (که در رسته‌های نقطه‌دار معادل آن است که $\ker(f) = 0$).

۲. g یک بروریختی باشد (که در بسیاری از رسته‌ها معادل آن است که $\operatorname{coker}(g) = 0$).

۳. دنباله در B دقیق باشد، یعنی f یک هسته برای g باشد (یا به طور معادل، g یک هم‌هسته برای f باشد).

ملاحظه ۱-۲-۲۱. *در رسته‌های مانند* $\mathbf{Ab}$ *یا* $\mathbf{Mod}_R$*، این تعریف معادل شرط کلاسیک* $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$ *است. اما در رسته‌های عمومی‌تر، از تعریف رسته‌ای ارائه شده استفاده می‌کنیم که بر اساس مفهوم هسته و هم‌هسته استوار است.*

۱-۳ نظریه تاب در رسته‌های نقطه‌دار

نظریه تاب، که ریشه در کارهای دیرسون [۱۳] و گولد [۲۰] دارد، مطالعه نظام‌مند زیراشیاء «خاص» در یک رسته است.

۱-۳-۱ نظریه تاب

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته نقطه‌دار با شیء صفر 0 باشد. یک **نظریه تاب** در $\mathcal{C}$ جفت $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ از زیررسته‌های پر است که:

۱. برای هر $T \in \mathcal{T}$ و $F \in \mathcal{F}$، $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, F) = \{0\}$.

۲. برای هر شیء $X \in \mathcal{C}$، یک دنباله دقیق کوتاه

$$0 \to T \to X \to F \to 0$$

وجود دارد که $T \in \mathcal{T}$ و $F \in \mathcal{F}$.

اشیاء در $\mathcal{T}$ را **تاب** و اشیاء در $\mathcal{F}$ را **آزاد** می‌نامیم.

مثال ۱-۳-۲ (تاب و آزاد در گروه‌های آبلی). در رسته $\mathbf{Ab}$ گروه‌های آبلی، جفت $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ زیر یک نظریه تاب کلاسیک است:

- $\mathcal{T}$: کلاس همه گروه‌های **تاب** (گروه‌هایی که هر عضو آن مرتبه متناهی دارد).

- $\mathcal{F}$: کلاس همه گروه‌های **بی‌تاب** (گروه‌هایی که تنها عضو با مرتبه متناهی، عضو خنثی است).

برای هر گروه آبلی G، زیرگروه پریشالی آن $t(G)$ (مجموعه همه عضوهایی با مرتبه متناهی) عضوی از $\mathcal{T}$ است و خارج‌قسمت $G/t(G)$ عضوی از $\mathcal{F}$ است. دنباله دقیق کوتاه

$$\circ \to t(G) \to G \to G/t(G) \to \circ$$

شرط دوم تعریف را ارضا می‌کند. این مثال، الهام‌بخش اصلی برای تعمیم مفهوم تاب به رسته‌های دیگر بوده است [۱۳].

مثال ۱-۳-۳. ۱. در رسته **Ab**، جفت (گروه‌های متناهی، گروه‌های بی‌مؤلفه متناهی) یک نظریه تاب است.

۲. در رسته $\mathbf{Mod}_R$ (مدول‌های راست روی حلقه R)، برای هر مجموعه ایدآل اول S، جفت $(\mathcal{T}_S، \mathcal{F}_S)$ که در آن $\mathcal{T}_S$ شامل مدول‌های Sـ تاب و $\mathcal{F}_S$ شامل مدول‌های Sـ بدون‌تاب است، یک نظریه تاب تشکیل می‌دهد.

فصل ۲

رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب و نظریه پیش‌تاب

در این فصل به مطالعه مجموعه‌های پیش‌مرتب و ساختارهای مرتبط با آن‌ها می‌پردازیم. مجموعه‌های پیش‌مرتب یکی از بنیادی‌ترین ساختارهای ترتیبی در ریاضیات است که به طور همزمان هر دو مفهوم رابطه هم‌ارزی و رابطه ترتیب جزئی را در بر می‌گیرند. هدف اصلی در این فصل، معرفی و توسعه نظریه پیش‌تاب در رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب و بررسی رسته پایدار برگرفته از این نظریه است. این مفاهیم نقش اساسی در درک ساختارهای جبری مرتبه‌ای و تعمیم نظریه‌های کلاسیک تاب به زمینه‌های عمومی‌تر ایفا می‌کنند.

۲-۱ رسته مجموعه‌های مرتب

تعریف ۲-۱-۱. فرض کنید P یک مجموعه باشد. یک رابطه ρ روی مجموعه P، زیرمجموعه‌ای از $P \times P$ است. رابطه ρ روی مجموعه P:

- **بازتابی** است هرگاه برای هر $x \in P$، $x \leq x$،
- **تراگذری** است اگر برای هر $x, y, z \in P$، $x \leq y$ و $y \leq z$، آن‌گاه $x \leq z$،

- **پادتقارنی** است هرگاه برای هر $x, y \in P$، اگر $x \leq y$ و $y \leq x$، آن‌گاه $x = y$.
- **تقارنی** است هرگاه برای هر $x, y \in P$، اگر $x \leq y$، آن‌گاه $y \leq x$.

تعریف ۲-۱-۲. رابطه ρ روی مجموعه P رابطه ترتیبی جزیی است هرگاه، بازتابی، پادتقارنی و تراگذری باشد.

تعریف ۲-۱-۳. یک رابطه ترتیب خطی، رابطه ترتیب جزئی‌ای است که خطی باشد، یعنی، برای هر $x, y \in P$، $x \leq y$ یا $y \leq x$. به عبارت دیگر، هر دو عضو آن مقایسه‌پذیر باشد.

تعریف ۲-۱-۴. رابطه ρ روی مجموعه P رابطه هم‌ارزی است هرگاه، بازتابی، تقارنی و تراگذری باشد.

تعریف ۲-۱-۵. رسته **ParOrd** به صورت زیر تعریف می‌شود:

- **اشیاء:** جفت‌های $(A, \leq)$ که در آن A یک مجموعه ناتهی و $\leq$ یک رابطه ترتیب جزئی روی A است.
- **ریخت‌ها:** توابع $f : (A, \leq_A) \to (B, \leq_B)$ به طوری که برای هر $x, y \in A$، اگر $x \leq_A y$، آن‌گاه $f(x) \leq_B f(y)$. این توابع را **حفظ‌کننده ترتیب** می‌نامیم.

تعریف ۲-۱-۶. رسته **Triv** رسته‌ای است که در آن:

- **اشیاء:** زوج‌های $(A, =)$ که در آن A یک مجموعه ناتهی و $=$ یک رابطه تساوی روی A است.
- **ریخت‌ها:** توابع $f : (A, =) \to (B, =)$ به طوری که برای هر $x, y \in A$، اگر $x = y$، آن‌گاه $f(x) = f(y)$. این توابع را **حفظ‌کننده تساوی** می‌نامیم.

رسته **Equiv** زیررسته‌ای است که در آن

- **اشیاء:** زوج‌های $(A, \sim_A)$ که در آن A یک مجموعه ناتهی و $\sim_A$ یک رابطه هم‌ارزی روی A است.
- **ریخت‌ها:** توابع $f : (A, \sim_A) \to (B, \sim_B)$ به طوری که برای هر $x, y \in A$، اگر $x \sim_A y$، آن‌گاه $f(x) \sim_B f(y)$. این توابع را **حفظ‌کننده رابطه هم‌ارزی** می‌نامیم.

۲-۲ رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب

تعریف ۲-۲-۱. یک **پیش‌ترتیب** روی یک مجموعه ناتهی A رابطه‌ای دوتایی مانند ρ روی A (زیرمجموعه‌ای از $A \times A$) با دو خاصیت زیر است:

۱. **بازتابی**: برای هر عضو $a \in A$، رابطه $a\rho a$ برقرار است.

۲. **تراگذری**: برای هر سه عضو $a, b, c \in A$، اگر $a\rho b$ و $b\rho c$ برقرار باشند، آن‌گاه $a\rho c$ نیز برقرار است.

زوج (A, ρ) را یک **مجموعه پیش‌مرتب** می‌نامیم.

هنگامی که رابطه پیش‌ترتیب به طور واضح بیان شده باشد، مجموعه پیش‌مرتب (A, ρ) را برای سادگی با A نشان می‌دهیم.

تعریف ۲-۲-۲. رسته **Preord** شامل تمام مجموعه‌های پیش‌مرتب ناتهی است. یک ریخت در این رسته بین دو مجموعه پیش‌مرتب (A, ρ) و (A', ρ')، تابع $f : A \to A'$ است که در شرط زیر صدق کند:
برای هر دو عضو $a, b \in A$، اگر $a\rho b$ برقرار باشد، آن‌گاه $f(a)\rho' f(b)$ نیز برقرار است. به چنین توابعی، توابع **افزاینده** یا **حفظ‌کننده ترتیب** نیز گفته می‌شود.

گزاره ۲-۲-۳. *فرض کنید A یک مجموعه ناتهی باشد. در این صورت یک تناظر یک به یک بین مجموعه تمام پیش‌ترتیب‌های ρ روی A و مجموعه تمام زوج‌های $(\leq, \sim)$ وجود دارد، که در آن $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی A و $\leq$ یک ترتیب جزئی روی مجموعه خارج قسمتی $A/\sim$ است.*

اثبات. برای اثبات این گزاره، دو تابع معکوس همدیگر را تعریف می‌کنیم.
جهت اول: برای هر پیش‌ترتیب ρ روی A، رابطه هم‌ارزی $\simeq_\rho$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a \simeq_\rho b \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad a\rho b \text{ و } b\rho a.$$

این رابطه دقیقاً عضوهایی را که نسبت به ρ متقارن هستند، شناسایی می‌کند. سپس ترتیب جزئی $\leq_\rho$ روی $A/\simeq_\rho$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$[a]_{\simeq_\rho} \leq_\rho [b]_{\simeq_\rho} \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad a\rho b.$$

این تعریف به دلیل تراگذری ρ خوش‌تعریف است.

جهت دوم: برای هر زوج $(\sim, \leq)$ که در آن $\sim$ رابطه هم‌ارزی روی A و $\leq$ ترتیب جزئی روی $A/\sim$، پیش‌مرتب $\rho_{(\sim,\leq)}$ روی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a\rho_{(\sim,\leq)}b \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad [a]_\sim \leq [b]_\sim.$$

می‌توان به سادگی بررسی کرد که این تناظرها معکوس یکدیگر هستند و در تمام شرایط لازم برای یک تناظر یک به یک صدق می‌کنند. $\square$

تعریف ۲-۲-۴. زیررسته پر **ParOrd** از **Preord** شامل تمام مجموعه‌های پیش‌مرتب (A, ρ) است که در آن ρ یک ترتیب جزئی است، یعنی علاوه بر بازتابی و تراگذری، خاصیت پادمتقارن نیز دارد: اگر $a\rho b$ و $b\rho a$، آن‌گاه $a = b$.

تعریف ۲-۲-۵. زیررسته پر **Equiv** از **Preord** شامل تمام مجموعه‌های پیش‌مرتب (A, ρ) است که در آن ρ یک رابطه هم‌ارزی است، یعنی علاوه بر بازتابی و تراگذری، خاصیت تقارن نیز دارد.

گزاره ۲-۲-۶. *رسته* **Preord** *دارای ضرب‌های دکارتی و هم‌ضرب‌های دلخواه است.*

اثبات. برای خانواده‌ای از مجموعه‌های پیش‌مرتب $\{(A_i, \rho_i) \mid i \in I\}$، هم‌ضرب آن‌ها مجموعه $A := \coprod_{i\in I} A_i$ همراه با پیش‌ترتیب ρ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(a, i)\rho(b, j) \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad i = j \text{ و } a\rho_i b.$$

این تعریف تضمین می‌کند که عضوهایی از مؤلفه‌های مختلف هیچ‌گونه رابطه‌ای با هم ندارند. ضرب دکارتی این خانواده نیز مجموعه $\prod_{i\in I} A_i$ همراه با پیش‌ترتیب جزء‌به‌جزء است که به صورت

زیر تعریف می‌شود:

$$(f,g) \in \rho \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \forall i \in I, f(i)\rho_i g(i).$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که این ساختارها در خاصیت‌های جهانی مربوط به هم‌ضرب و ضرب در رسته **Preord** صدق می‌کنند. □

تعریف ۲-۲-۷. یک شیء (A,ρ) در **Preord** را **بدیهی** می‌نامیم اگر ρ رابطه همانی باشد، یعنی $a\rho b$ اگر و تنها اگر $a=b$.

زیررسته تمام اشیاء بدیهی را با **Triv** نشان می‌دهیم.

لم ۲-۲-۸. *فرض کنید* (A,ρ) *و* (A',ρ') *اشیائی در* **Preord** *و* $f: A \to A'$ *یک تابع باشد. در این‌صورت،* $f : (A,\rho) \to (A',\rho')$ *یک ریخت بدیهی در* **Preord** *است اگر و تنها اگر برای هر* $a,b \in A$ *با* $a\rho b$ *داشته باشیم* $f(a)=f(b)$.

اثبات. اگر f بدیهی باشد، آن‌گاه ریخت‌های $g : (A,\rho) \to (B,=)$ و $h : (B,=) \to (A',\rho')$ وجود دارند که $f = hg$. از آن‌جا که g یک ریخت است، $a\rho b$ دلالت بر $g(a)=g(b)$ می‌کند، پس $f(a) = h(g(a)) = h(g(b)) = f(b)$.

برعکس، اگر $a\rho b$ دلالت بر $f(a)=f(b)$ کند، آن‌گاه می‌توان f را به صورت $f = \overline{f}\pi$ تجزیه کرد، که در آن $\pi : A \to A/\sim_f$ تصویر خارج قسمتی با رابطه هم‌ارزی

$$a \sim_f b \;\text{اگر و تنها اگر}\; f(a)=f(b)$$

و $\overline{f} : A/\sim_f \to A'$ تابع القایی با ضابطه $\overline{f}([a]_{\sim_f}) = f(a)$ است. همچنین، $(A/\sim_f, =)$ یک شیء بدیهی است. □

مجموعه تمام ریخت‌های از A به A' در رسته **Preord** را با $\mathrm{Hom}(A,A')$ نشان می‌دهیم. همچنین، مجموعه تمام ریخت‌های بدیهی از A به A' را با $\mathrm{Triv}(A,A')$ نمایش می‌دهیم.

۲–۳ توپولوژی الکساندروف و مجموعه‌های پیش‌مرتب

ابتدا تعریف فضای توپولوژی الکساندروف را یادآوری می‌کنیم:

تعریف ۲–۳–۱. یک فضای توپولوژی X را **الکساندروف ـ گسسته** می‌نامیم اگر اشتراک هر خانواده‌ای از مجموعه‌های باز در X، باز باشد.

تعریف ۲–۳–۲. رسته تمام فضاهای توپولوژی الکساندروف ـ گسسته به همراه توابع پیوسته بین آن‌ها را با **ATop** نمایش می‌دهیم که زیررسته‌ای پر از رسته **Top** است.

لم ۲–۳–۳. *به هر مجموعه پیش مرتب (X, ρ) یک توپولوژی τ_ρ می‌توان نظیر ساخت.*

اثبات. زیرمجموعه $U \subseteq X$ باز می‌گوییم اگر و تنها اگر برای هر $a \in U$ و $x \in X$ با ویژگی $x\rho a$، داشته باشیم $x \in U$. قرار می‌دهیم:

$$\tau_\rho = \{U \subseteq X \mid \big((\forall\, a \in U)\,(\forall\, x \in X)\, x\rho a \;\Rightarrow x \in U\big)\}.$$

در این‌صورت، به سادگی می‌توان دید τ_ρ یک توپولوژی الکساندروف است. □

لم ۲–۳–۴. *از رسته* **Preord** *به رسته* **ATop** *یک تابعگون به‌صورت زیر وجود دارد:*

$$F : \mathbf{Preord} \longrightarrow \mathbf{ATop}$$

$$\begin{tikzcd}
(X, \rho) \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & (X, \tau_\rho) \arrow[d, "F(f)(U)=f(U)"] \\
(Y, \rho') \arrow[r] & (Y, \tau_{\rho'})
\end{tikzcd}$$

اثبات. کافی است نشان دهیم $F(f)$ تابعی پیوسته است. فرض کنیم $U \in \tau_{\rho'}$. ثابت می‌کنیم $F(f)^{-1}(U) \in \tau_\rho$. برای این منظور فرض می‌کنیم، $x \in X, a \in (F(f))^{-1}(U)$ و $x\rho a$. چون $(F(f))^{-1}(U) = f^{-1}(U)$، داریم $a \in f^{-1}(U)$. پس $f(a) \in U$. ازاین‌که $x\rho a$ و f حافظ پیش‌ترتیب است، به‌دست می‌آوریم: $f(x)\rho f(a)$. پس $f(x) \in U$ که نتیجه می‌دهد $x \in F(f)^{-1}(U)$. □

لم ۲-۳-۵. *به هر فضای توپولوژی الکساندروف‌ـ‌گسسته، یک رابطه پیش‌ترتیب می‌توان نظیر ساخت.*

اثبات. فرض می‌کنیم (X,τ) فضای توپولوژی الکساندروف باشد. رابطه $\leq_\tau$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x \leq_\tau y \Leftrightarrow \overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}},$$

یک رابطه پیش‌ترتیب است. □

لم ۲-۳-۶. *از رسته* **ATop** *به رسته* **Preord** *یک تابعگون به صورت زیر وجود دارد:*

$$G : \mathbf{ATop} \longrightarrow \mathbf{Preord}$$

$$\begin{array}{ccc} (X,\tau) & \longrightarrow & (X,\leq_\tau) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)=f} \\ (Y,\tau') & \longrightarrow & (Y,\leq_{\tau'}) \end{array}$$

اثبات. کافی است نشان دهیم تابع f حفظ کننده پیش‌ترتیب است. فرض می‌کنیم $x,x' \in X$ و $x \leq_\tau x'$. در این‌صورت، $\overline{\{x'\}} \subseteq \overline{\{x\}}$. حال چون تابع f پیوسته است، داریم $\overline{\{f(x')\}} \subseteq \overline{\{f(x)\}}$. □

قضیه ۲-۳-۷. *زیررسته پر* **Top** *با رسته* **Preord** *یکریخت است.*

اثبات. با توجه به لم‌های ۲-۳-۳، ۲-۳-۴، ۲-۳-۵ و ۲-۳-۶، دو تابعگون F و G وارون هم هستند. به طور خلاصه، برای هر مجموعه پیش‌مرتب (X,ρ)، توپولوژی τ_ρ روی X را به این صورت تعریف می‌کنیم که یک زیرمجموعه $U \subseteq X$ باز است اگر و تنها اگر برای هر $a \in U$ و $x \in X$ با $x\rho a$، داشته باشیم $x \in U$. به عبارت دیگر، U باید یک مجموعه رو به پایین نسبت به ρ باشد. این توپولوژی الکساندروف‌ـ‌گسسته است زیرا اشتراک هر خانواده‌ای از مجموعه‌های رو به پایین خود یک مجموعه رو به پایین است.

برعکس، برای هر فضای الکساندروف‌ـ گسسته (X,τ)، پیش‌مرتب $\leq_\tau$ را روی X به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \leq_\tau y \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}},$$

که در آن $\overline{S}$ بستار مجموعه S در توپولوژی τ است. این تناظر یک یکریختی بین رسته‌ها ایجاد می‌کند. □

تعریف ۲-۳-۸. فرض کنید (A,ρ) یک مجموعه پیش‌مرتب باشد. یک زیرمجموعه $B \subseteq A$ را **بسته‌ـ باز** می‌نامیم اگر برای هر $a \in A \setminus B$ و $b \in B$، داشته باشیم $a \not\rho b$ و $b \not\rho a$.

گزاره ۲-۳-۹. *یک زیرمجموعه B از (A,ρ) بسته‌ـ باز است اگر و تنها اگر در فضای الکساندروف‌ـ گسسته (A,τ_ρ) بسته‌ـ باز باشد.*

لم ۲-۳-۱۰. *فرض کنید $\{(A_i,\rho_i) \mid i \in I\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های پیش‌مرتب باشد و $(\coprod_{i\in I} A_i, \rho)$ هم‌ضرب آن‌ها در* **Preord** *باشد. برای هر $i \in I$، تصویر کانونی $A_i \times \{i\}$ در هم‌ضرب یک زیرمجموعه بسته‌ـ باز است.*

اثبات. با تعریف پیش‌مرتب هم‌ضرب، اگر $j \in I\setminus\{i\}$، $a \in A_i$ و $b \in A_j$، آن‌گاه $(a,i) \not\rho (b,j)$ و $(b,j) \not\rho (a,i)$، زیرا شرط $i = j$ در تعریف برقرار نیست. بنابراین $A_i \times \{i\}$ بسته‌ـ باز است. □

تکریختی و برویختی

گزاره ۲-۳-۱۱. *فرض کنید $f : (A,\rho) \to (A',\rho')$ یک ریخت در* **Preord** *باشد. در این‌صورت:*

۱. *f تکریختی در* **Preord** *است اگر و تنها اگر f تابع یک‌به‌یک باشد.*

۲. *f برویختی در* **Preord** *است اگر و تنها اگر f تابع پوشا باشد.*

اثبات. **قسمت (۱):**

$(\Leftarrow)$ فرض کنید f یک تکریختی در **Preord** باشد اما یک‌به‌یک نباشد. پس عضوهای $a_1, a_2 \in A$ با $a_1 \neq a_2$ وجود دارند به طوری که $f(a_1) = f(a_2)$. مجموعه تک‌عضوی $B = \{b\}$ را در

نظر بگیرید و دو ریخت $g, h : (B, =) \to (A, \rho)$ را به صورت $g(b) = a_1$ و $h(b) = a_2$ تعریف کنید. واضح است که $g \neq h$ چون $a_1 \neq a_2$. اما $(f \circ g)(b) = f(a_1) = f(a_2) = (f \circ h)(b)$، پس $f \circ g = f \circ h$. این با فرض تکریختی بودن f در تناقض است. بنابراین f باید یک‌به‌یک باشد.

$(\Rightarrow)$ فرض کنید f یک‌به‌یک باشد و $g, h : (B, \sigma) \to (A, \rho)$ ریخت‌هایی باشند به طوری که $f \circ g = f \circ h$. برای هر $b \in B$، داریم $f(g(b)) = f(h(b))$ و چون f یک‌به‌یک است، $g(b) = h(b)$. بنابراین $g = h$ در نتیجه f یک تکریختی است.

قسمت (۲):

$(\Leftarrow)$ فرض کنید f یک بروریختی در **Preord** باشد اما پوشا نباشد. پس $A' \setminus f(A) \neq \emptyset$. فرض کنید $a'_0 \in A' \setminus f(A)$. دو ریخت $g, h : (A', \rho') \to (A' \sqcup \{*\}, \tau)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(a') = \begin{cases} a', & a' \in f(A) \\ *, & a' \notin f(A) \end{cases} \quad \text{و} \quad h(a') = \begin{cases} a', & a' \in f(A) \\ a'_0, & a' \notin f(A) \end{cases}$$

که در آن τ یک رابطه پیش‌ترتیب مناسب روی $A' \sqcup \{*\}$ است. برای هر $a \in A$، $f(a) \in f(A)$ پس $g(f(a)) = f(a) = h(f(a))$. بنابراین $g \circ f = h \circ f$. اما $g \neq h$ چون برای $a'_0 \notin f(A)$، $g(a'_0) = * \neq a'_0 = h(a'_0)$. این با فرض بروریختی بودن f در تناقض است. بنابراین f باید پوشا باشد.

$(\Rightarrow)$ فرض کنید f پوشا و $g, h : (A', \rho') \to (B, \sigma)$ ریخت‌هایی باشند به طوری که $g \circ f = h \circ f$. برای هر $a' \in A'$، چون f پوشا است، $a \in A$ وجود دارد به طوری که $f(a) = a'$. پس $g(a') = g(f(a)) = h(f(a)) = h(a')$. بنابراین $g = h$ در نتیجه f یک بروریختی است.

$\square$

۲-۴ تجزیه‌پذیری در رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب

تعریف ۲-۴-۱. مجموعه پیش‌مرتب (A,ρ) را **تجزیه‌ناپذیر** در رسته **Preord** می‌نامیم اگر برای هیچ دو مجموعه پیش‌مرتب ناتهی و مجزای B و C، مجموعه پیش‌مرتب A یکریخت با $B\coprod C$ نباشد.

لم ۲-۴-۲. *شرایط زیر برای یک مجموعه پیش‌مرتب (A,ρ) معادل هستند:*

۱. (A,ρ) *تجزیه‌ناپذیر است.*

۲. *فضای الکساندروف‌ـ گسسته* (A,τ_ρ) *همبند است.*

اثبات. **(۲) $\Rightarrow$ (۱):** فرض کنید (A,ρ) تجزیه‌ناپذیر باشد. برای اثبات این‌که (A,τ_ρ) همبند است، فرض خلف می‌کنیم که (A,τ_ρ) ناهمبند باشد. در این صورت، دو مجموعه باز ناتهی و مجزا U و V در τ_ρ وجود دارند به طوری که:

$$A=U\cup V \quad \text{و} \quad U\cap V=\emptyset.$$

داریم $V=A\setminus U$ که U باز است. فرض می‌کنیم $a\in V$ و $b\in U$. در این‌صورت، اگر $a\rho b$، آن‌گاه $a\in U$ که تناقض است. پس بنا به تعریف ===۳-۴-۲===، V در A بسته‌ـ باز است. به‌طور مشابه، U نیز در A بسته‌ـ باز است. پس، U و V هر دو ناتهی، بسته‌ـ باز و مجزا هستند. بنابراین:

$$(A,\rho)\cong (U,\rho|_U)\coprod (V,\rho|_V)$$

که با تجزیه‌ناپذیری (A,ρ) در تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که (A,τ_ρ) باید همبند باشد.

(۱) $\Rightarrow$ (۲): فرض کنید (A,τ_ρ) همبند باشد. برای اثبات تجزیه‌ناپذیری (A,ρ)، فرض خلف می‌کنیم که (A,ρ) تجزیه‌پذیر باشد. در این صورت، دو مجموعه پیش‌مرتب ناتهی (B,σ) و (C,δ) وجود دارند به طوری که:

$$(A,\rho)\cong (B,\sigma)\coprod (C,\delta).$$

در هم‌ضرب $(B\coprod C,\rho)$، از تعریف پیش‌مرتب هم‌ضرب می‌دانیم که برای هر $b\in B$ و $c\in C$، نه $b\rho c$ و نه $c\rho b$ برقرار است. همچنین، از لم‌های قبلی می‌دانیم که B و C هر دو زیرمجموعه‌های بسته‌ــ باز در (A,ρ) هستند.

اما اگر B و C هر دو بسته‌ــ باز و ناتهی باشند، آن‌گاه $A=B\cup C$ با $B\cap C=\emptyset$، که نشان می‌دهد (A,τ_ρ) ناهمبند است. این با فرض همبندی (A,τ_ρ) در تناقض است. بنابراین، (A,ρ) باید تجزیه‌ناپذیر باشد. $\square$

تعریف ۲-۴-۳. فرض کنید (A,ρ) یک مجموعه پیش‌مرتب باشد. رابطه هم‌ارزی تولید شده توسط ρ را با $\equiv_\rho$ نشان می‌دهیم، که به صورت زیر تعریف می‌شود:
$x\equiv_\rho y$ اگر و تنها اگر دنباله‌ای متناهی مانند $x_0=x,x_1,\ldots,x_n=y$ در A وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i=1,\ldots,n$، داشته باشیم $x_{i-1}\rho x_i$ یا $x_i\rho x_{i-1}$.

لم ۲-۴-۴. *فرض کنید (A,ρ) یک مجموعه پیش‌مرتب باشد.*

۱. *اگر $B\subseteq A$ بسته‌ــ باز باشد و $a\in B$، آن‌گاه $[a]_{\equiv_\rho}\subseteq B$.*

۲. *برای هر $a\in A$، کلاس هم‌ارزی $[a]_{\equiv_\rho}$ بسته‌ــ باز و همبند است.*

۳. *هر زیرمجموعه بسته‌ــ باز از A اجتماع کلاس‌های هم‌ارزی نسبت به رابطه $\equiv_\rho$ است.*

۴. *مؤلفه‌های همبندی A دقیقاً کلاس‌های هم‌ارزی A نسبت به رابطه $\equiv_\rho$ هستند.*

اثبات. **اثبات (۱):** فرض کنید $B\subseteq A$ بسته‌ــ باز باشد و $a\in B$. نشان می‌دهیم $[a]_{\equiv_\rho}\subseteq B$. فرض کنید $x\in[a]_{\equiv_\rho}$. طبق تعریف $\equiv_\rho$، دنباله‌ای از عضوهای $x_0=a,x_1,\ldots,x_n=x$ در A وجود دارد به طوری که برای هر $i=1,\ldots,n$، یا $x_{i-1}\rho x_i$ یا $x_i\rho x_{i-1}$.

حال با استقرا روی $k=0,1,\ldots,n$ نشان می‌دهیم که $x_k\in B$.

پایه استقرا: بنابر $k=0$، طبق فرض $x_0=a\in B$.

گام استقرا: فرض کنید $x_k\in B$. دو حالت داریم:

حالت ۱: اگر $x_k\rho x_{k+1}$، از آن‌جا که B بسته‌ــ باز است و $x_k\in B$، اگر $x_{k+1}\notin B$، آن‌گاه $x_k \not\rho x_{k+1}$ (چون در غیر این صورت با تعریف بسته‌ــ باز بودن در تناقض است). بنابراین $x_{k+1}\in B$.

حالت ۲: اگر $x_{k+1}\rho x_k$، با توجه به بسته‌ــ باز بودن B و $x_k \in B$، اگر $x_{k+1} \notin B$، آن‌گاه $x_{k+1} \not\rho x_k$. بنابراین $x_{k+1} \in B$.

در هر دو حالت، $x_{k+1} \in B$. بنابراین با استقرا، $x_n = x \in B$.

اثبات (۲): ابتدا نشان می‌دهیم $[a]_{\equiv_\rho}$ بسته‌ــ باز است. فرض کنید $x \in [a]_{\equiv_\rho}$ و $y \in A$ به طوری که $x\rho y$ یا $y\rho x$. در این صورت، $x \equiv_\rho y$، زیرا $\equiv_\rho$ رابطه هم‌ارزی تولید شده توسط ρ است. پس $y \in [a]_{\equiv_\rho}$ و $[a]_{\equiv_\rho}$ بسته‌ــ باز است.

اکنون همبندی $[a]_{\equiv_\rho}$ را نشان می‌دهیم. فرض کنید $[a]_{\equiv_\rho} = U \cup V$ که U و V زیرمجموعه‌های بسته‌ــ باز ناتهی و مجزا از A باشند. از آن‌جا که $a \in [a]_{\equiv_\rho}$، بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم $a \in U$. از قسمت (۱)، چون U بسته‌ــ باز است و $a \in U$، داریم $[a]_{\equiv_\rho} \subseteq U$. اما این با ناتهی بودن V در تناقض است. بنابراین چنین تجزیه‌ای وجود ندارد و $[a]_{\equiv_\rho}$ همبند است.

اثبات (۳): فرض کنید $B \subseteq A$ بسته‌ــ باز باشد. نشان می‌دهیم:

$$B = \bigcup_{a\in B}[a]_{\equiv_\rho}.$$

طرف چپ به‌طور واضح در طرف راست قرار دارد. برای نشان دادن عکس، اگر $x \in \bigcup_{a\in B}[a]_{\equiv_\rho}$، آن‌گاه $a \in B$ وجود دارد به طوری که $x \in [a]_{\equiv_\rho}$. از قسمت (۱)، داریم $[a]_{\equiv_\rho} \subseteq B$، پس $x \in B$.

اثبات (۴): طبق قسمت (۲)، هر کلاس هم‌ارزی نسبت به رابطه $\equiv_\rho$ یک مؤلفه همبند از A است، زیرا همبند و بسته‌ــ باز است. برعکس، فرض کنید Y یک مؤلفه همبندی از A باشد. توجه می‌کنیم که برای هر $a \in Y$، اشتراک $[a]_{\equiv_\rho} \cap Y$ در توپولوژی زیرفضایی Y بسته‌ــ باز است. از آن‌جا که

$$Y = \bigcup_{a\in Y}([a]_{\equiv_\rho} \cap Y)$$

و هر اجتماع زیرمجموعه‌های بسته‌ــ باز، بسته‌ــ باز است (زیرا (A, τ_ρ) یک فضای الکساندروفــ گسسته است)، از همبند بودن Y نتیجه می‌شود که عضوی $a_\circ \in Y$ وجود دارد به طوری که $Y = [a_\circ]_{\equiv_\rho} \cap Y$. به عبارت دیگر، $Y \subseteq [a_\circ]_{\equiv_\rho}$ و از آن‌جا که Y یک مؤلفه همبندی است و $[a_\circ]_{\equiv_\rho}$ همبند است، نتیجه می‌گیریم که $Y = [a_\circ]_{\equiv_\rho}$. □

نتیجه ۲-۴-۵. *هر مجموعه پیش‌مرتب (A, ρ) را می‌توان به طور یکتا به صورت اجتماع مجزایی از زیرمجموعه‌های تجزیه‌ناپذیر بسته‌ـ باز نوشت:*

$$A = \coprod_{[a]_{\equiv_\rho} \in A/\equiv_\rho} [a]_{\equiv_\rho}.$$

تعریف ۲-۴-۶. برای هر دو شیء (A, ρ) و (A', ρ') در **Preord**، رابطه $R_{A,A'}$ روی $\mathrm{Hom}(A, A')$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
برای $f, g : (A, \rho) \to (A', \rho')$، $fR_{A,A'}g$ اگر و تنها اگر یک زیرمجموعه بسته‌ـ باز B از A وجود داشته باشد به طوری که $f|_B$ و $g|_B$ هر دو ریخت‌های بدیهی باشند و $f|_{A\setminus B} = g|_{A\setminus B}$.

لم ۲-۴-۷. *انتساب* $R_{A,A'} \mapsto (A, A')$ *یک رابطه هم‌ارزی سازگار با عمل ترکیب روی رسته* **Preord** *است.*

اثبات. برای نشان دادن این‌که R یک هم‌ارزی روی رسته **Preord** است، باید چهار ویژگی را بررسی کنیم:

ویژگی ۱: بازتابی بودن

برای هر ریخت $f : (A, \rho) \to (A, \rho)$ در **Preord**، اگر $B = \emptyset$ را انتخاب کنیم، آنگاه:

- $f|_\emptyset$ و $f|_\emptyset$ هر دو ریخت‌های بدیهی هستند (به طور پیش‌فرض)
- $f|_{A\setminus\emptyset} = f|_{A\setminus\emptyset}$

پس $fR_{A,A'}f$.

ویژگی ۲: متقارن بودن

اگر $fR_{A,A'}g$ با زیرمجموعه بسته‌ـ باز $B \subseteq A$، آنگاه به وضوح با همان زیرمجموعه B، داریم $gR_{A,A'}f$.

ویژگی ۳: متعدی بودن

فرض کنید $f, g, h : (A, \rho) \to (A', \rho')$ ریخت باشند به طوری که:

- $fR_{A,A'}g$ با زیرمجموعه بسته‌ـ باز $B \subseteq A$

- $gR_{A,A'}h$ با زیرمجموعه بسته‌ـ باز $C \subseteq A$

یعنی:

- $f|_B$ و $g|_B$ بدیهی هستند و $f|_{A\setminus B} = g|_{A\setminus B}$
- $g|_C$ و $h|_C$ بدیهی هستند و $g|_{A\setminus C} = h|_{A\setminus C}$

حال $D = B \cup C$ را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم:

الف. $f|_D$ و $h|_D$ بدیهی هستند،

ب. $f|_{A\setminus D} = h|_{A\setminus D}$.

الف: فرض کنید $x, y \in D$ با $x\rho y$. سه حالت داریم:

۱. اگر $x, y \in B$: از بدیهی بودن $f|_B$ داریم $f(x) = f(y)$،

۲. اگر $x, y \in C \setminus B$: از $f|_{A\setminus B} = g|_{A\setminus B}$ داریم $f(x) = g(x)$ و $f(y) = g(y)$، و از بدیهی بودن $g|_C$ داریم $g(x) = g(y)$، پس $f(x) = f(y)$،

۳. اگر $x \in B$ و $y \in C \setminus B$ یا برعکس: این حالت نمی‌تواند رخ دهد زیرا اگر $x\rho y$ و $x \in B$ و $y \notin B$، این با بسته‌ـ باز بودن B در تناقض است (چون باید $y \in B$ باشد).

به طور مشابه $h|_D$ بدیهی است.

ب: اگر $x \in A \setminus D = A \setminus (B \cup C)$، آن‌گاه: از $f|_{A\setminus B} = g|_{A\setminus B}$ داریم $f(x) = g(x)$ و از $g|_{A\setminus C} = h|_{A\setminus C}$ داریم $g(x) = h(x)$. پس $f(x) = h(x)$.

ویژگی ۴: سازگاری با ترکیب

برای تکمیل اثبات این‌که R یک هم‌ارزی روی رسته **Preord** است، باید سازگاری آن با ترکیب ریخت‌ها را بررسی کنیم. فرض کنید $f, g : (A, \rho) \to (A', \rho')$ دو ریخت با $fR_{A,A'}g$ باشند، و همچنین $h : (B, \sigma) \to (A, \rho)$ و $\ell : (A', \rho') \to (C, \tau)$ ریخت‌های دلخواهی باشند. از آن‌جا که $fR_{A,A'}g$، بر اساس تعریف، زیرمجموعه بسته‌ـ باز $X \subseteq A$ وجود دارد که در آن $f|_X$ و $g|_X$ هر دو ریخت‌های بدیهی هستند و همچنین $f|_{A\setminus X} = g|_{A\setminus X}$ برقرار است.

حال مجموعه $h^{-1}(X) \subseteq B$ را در نظر می‌گیریم. از آن‌جا که h یک ریخت پیوسته از نظر توپولوژی الکساندروف است و X بسته‌ـباز است، $h^{-1}(X)$ نیز در (B,σ) بسته‌ـباز خواهد بود. برای اثبات بدیهی بودن $\ell fh|_{h^{-1}(X)}$، فرض کنید $b,b' \in h^{-1}(X)$ با $b\sigma b'$. در این صورت $h(b),h(b') \in X$ و از آن‌جا که h یک ریخت است، $h(b)\rho h(b')$ برقرار است. چون $f|_X$ بدیهی است و $h(b),h(b') \in X$ با $h(b)\rho h(b')$، نتیجه می‌گیریم که $f(h(b)) = f(h(b'))$ و در نتیجه $\ell(f(h(b))) = \ell(f(h(b')))$. این استدلال نشان می‌دهد که $\ell fh|_{h^{-1}(X)}$ یک ریخت بدیهی است. به طور کاملاً مشابه، با جایگزینی f با g، می‌توان نشان داد که $\ell gh|_{h^{-1}(X)}$ نیز یک ریخت بدیهی است.

اکنون بخش باقی‌مانده از اثبات را کامل می‌کنیم. باید نشان دهیم که $\ell fh|_{B\setminus h^{-1}(X)} = \ell gh|_{B\setminus h^{-1}(X)}$. فرض کنید $b \in B \setminus h^{-1}(X)$. در این صورت، $h(b) \in A \setminus X$ و از شرط $f|_{A\setminus X} = g|_{A\setminus X}$ نتیجه می‌گیریم که $f(h(b)) = g(h(b))$، بنابراین $\ell(f(h(b))) = \ell(g(h(b)))$. این برابری برای هر $b \in B \setminus h^{-1}(X)$ برقرار است، پس در کل این زیرمجموعه، ℓfh و ℓgh با هم برابرند. پس نشان دادیم که $\ell fh R_{B,C} \ell gh$ با زیرمجموعه بسته‌ـباز $h^{-1}(X) \subseteq B$، که کامل‌کننده اثبات سازگاری R با ترکیب ریخت‌ها است. $\square$

۲-۵ پیش‌هسته و پیش‌هم‌هسته در رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب

تعریف ۲-۵-۱. فرض کنید $f : A \to A'$ یک ریخت در **Preord** باشد. یک **پیش‌هسته** برای f ریخت $k : X \to A$ است به طوری که:

۱. fk یک ریخت بدیهی است.

۲. برای هر ریخت $\lambda : Y \to A$ طوری‌که $f\lambda$ ریخت بدیهی باشد، ریخت یکتای $\lambda' : Y \to X$ وجود دارد به طوری که $\lambda = k\lambda'$.

گزاره ۲-۵-۲. *فرض کنید $f : (A,\rho) \to (A',\rho')$ یک ریخت در **Preord** باشد. در این‌صورت، ریخت $k : (A, \rho\cap \sim_f) \to (A,\rho)$، که در آن k همانی و $\sim_f$ رابطه هم‌ارزی متناظر با f است، یک پیش‌هسته برای f است.*

اثبات. برای اثبات این که k یک پیش‌هسته برای f است، باید دو شرط اساسی را بررسی کنیم:

شرط اول: $f \circ k$ یک ریخت بدیهی است.

فرض کنید $a, b \in A$ با $a(\rho \cap \sim_f)b$. از تعریف اشتراک روابط داریم: $a\rho b$ (از ρ) و $a \sim_f b$ (از $\sim_f$). از تعریف رابطه $\sim_f$ می‌دانیم که $a \sim_f b$ اگر و تنها اگر $f(a) = f(b)$. بنابراین:

$$f(k(a)) = f(a) = f(b) = f(k(b))$$

پس $f \circ k$ یک ریخت بدیهی است.

شرط دوم: خاصیت جهانی پیش‌هسته.

فرض کنید $\lambda : (B, \sigma) \to (A, \rho)$ یک ریخت دلخواه باشد به طوری که $f \circ \lambda$ یک ریخت بدیهی است. باید نشان دهیم که یک ریخت یکتای $\lambda' : (B, \sigma) \to (A, \rho \cap \sim_f)$ وجود دارد به طوری که $\lambda = k \circ \lambda'$.

وجود: تعریف می‌کنیم $\lambda' = \lambda$ به عنوان تابع (زیرا k همانی شمول است). باید ثابت کنیم که λ در واقع یک ریخت از (B, σ) به $(A, \rho \cap \sim_f)$ است.

فرض کنید $b, b' \in B$ با $b\sigma b'$. از آن‌جا که λ یک ریخت است، داریم $\lambda(b)\rho\lambda(b')$. همچنین، از آن‌جا که $f \circ \lambda$ بدیهی است و $b\sigma b'$، داریم: $f(\lambda(b)) = f(\lambda(b'))$، که طبق تعریف یعنی $\lambda(b) \sim_f \lambda(b')$. بنابراین: $\lambda(b)(\rho \cap \sim_f)\lambda(b')$، پس λ یک ریخت از (B, σ) به $(A, \rho \cap \sim_f)$ است.

یکتایی: فرض کنید $\lambda'' : (B, \sigma) \to (A, \rho \cap \sim_f)$ ریخت دیگری باشد به طوری که $\lambda = k \circ \lambda''$. از آن‌جا که k تابع همانی شمول است، داریم:

$$\lambda(b) = k(\lambda''(b)) = \lambda''(b)$$

برای هر $b \in B$. بنابراین $\lambda' = \lambda''$ و یکتایی برقرار است.

در نتیجه، k یک پیش‌هسته برای f است. $\square$

ملاحظه ۲-۵-۳. *این ساختار نشان می‌دهد که پیش‌هسته k بزرگترین زیرساختار از A است که f روی آن بدیهی عمل می‌کند. رابطه $\rho \cap \sim_f$ روابطی از ρ را حفظ می‌کند که تحت f به عضوهای*

یکسان تابع می‌شوند.

گزاره ۲-۵-۴. *فرض کنید $f : A \to A'$ یک ریخت در* **Preord** *و $\mu : X \to A$ یک پیش‌هسته برای f باشد. در این صورت ویژگی‌های زیر برقرار هستند:*

۱. *μ یک تک‌ریختی است.*

۲. *اگر $\lambda : Y \to A$ پیش‌هسته دیگری برای f باشد، آن‌گاه هم‌ریختی یکتای $\lambda' : Y \to X$ وجود دارد به طوری که $\lambda = \mu\lambda'$.*

اثبات. **(۱):** فرض کنید T یک مجموعه پیش‌مرتب باشد و $g, h : T \to X$ دو ریختی باشند به طوری که $\mu g = \mu h$. از آن‌جا که μ یک پیش‌هسته برای f است، $f\mu$ یک ریخت بدیهی است. در نتیجه $f\mu g = f\mu h$ نیز بدیهی است. خاصیت جهانی پیش‌هسته (برای μg) حکم می‌کند که یک ریختی یکتای $u : T \to X$ وجود داشته باشد به طوری که $\mu g = \mu u$. از مقایسه با $\mu g = \mu h$ و یکتایی u، نتیجه می‌گیریم $g = h = u$. بنابراین μ یک تک‌ریختی است.

(۲): اگر $\lambda : Y \to A$ نیز یک پیش‌هسته برای f باشد، آن‌گاه هر دو μ و λ دارای خاصیت جهانی یکسان نسبت به f هستند. با اعمال خاصیت پیش‌هسته μ بر ریخت λ، $\lambda' : Y \to X$ به طور یکتا موجود است به طوری که $\lambda = \mu\lambda'$. به طور متقارن، با اعمال خاصیت پیش‌هسته λ بر ریخت μ، $\mu' : X \to Y$ به طور یکتا موجود است به طوری که $\mu = \lambda\mu'$. با ترکیب این دو رابطه داریم:

$$\lambda = \lambda\mu'\lambda' \quad \text{و} \quad \mu = \mu\lambda'\mu'.$$

از آن‌جا که λ و μ هر دو تک‌ریختی هستند (طبق بخش اول)، نتیجه می‌گیریم $\mu'\lambda' = 1_Y$ و $\lambda'\mu' = 1_X$. بنابراین λ' یک هم‌ریختی است. □

در این قسمت، به معرفی پیش‌هم‌هسته می‌پردازیم.

تعریف ۲-۵-۵. فرض کنید $f : A \to A'$ یک ریخت در **Preord** باشد. یک **پیش‌هم‌هسته** برای ریخت f ریخت $p : A' \to X$ است به طوری که:

۱. pf یک ریخت بدیهی است.

۲. برای هر ریخت $\lambda : A' \to Y$ با λf بدیهی، ریخت یکتای $\lambda_1 : X \to Y$ وجود دارد به طوری که $\lambda = \lambda_1 p$.

ملاحظه ۲-۵-۶. *فرض کنید $f : (A, \rho) \to (A', \rho')$ یک ریخت در* **Preord** *باشد. برای ساخت پیش‌هم‌هسته f ، به صورت زیر عمل می‌کنیم.*
رابطه هم‌ارزی ζ_f روی A' را به عنوان کوچکترین رابطه هم‌ارزی شامل مجموعه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{(f(a_1), f(a_2)) \mid a_1, a_2 \in A, a_1 \rho a_2\}$$

به عبارت دقیق‌تر، ζ_f بستار متقارن و تراگذری رابطه زیر است:

$$\{(a', a') \mid a' \in A'\} \cup \{(f(a_1), f(a_2)) \mid a_1, a_2 \in A, a_1 \sim_\rho a_2\}$$

پیش‌ترتیب $\rho' \vee \zeta_f$ روی A' را به عنوان کوچکترین پیش‌ترتیب شامل ρ' و ζ_f تعریف می‌کنیم.

ملاحظه ۲-۵-۷. *از آن‌جا که رابطه هم‌ارزی ζ_f در پیش‌ترتیب $\rho' \vee \zeta_f$ قرار دارد، می‌توان مجموعه خارج قسمتی A'/ζ_f را با پیش‌ترتیب القایی ساخت. این پیش‌ترتیب القایی را نیز با $\rho' \vee \zeta_f$ نشان می‌دهیم.*

اکنون برای هر $a' \in A'$ تصویر کانونی $c : (A', \rho') \to (A'/\zeta_f, \rho' \vee \zeta_f)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $c(a') = [a']_{\zeta_f}$

در ادامه نشان خواهیم داد که این ریخت c در واقع یک پیش‌هم‌هسته برای f است.

گزاره ۲-۵-۸. *فرض کنید $f : (A, \rho) \to (A', \rho')$ یک ریخت در* **Preord** *باشد. در این‌صورت، تصویر کانونی $c : (A', \rho') \to (A'/\zeta_f, \rho' \vee \zeta_f)$ یک پیش‌هم‌هسته برای f است.*

اثبات. برای اثبات، باید دو شرط تعریف پیش‌هم‌هسته را برای c بررسی کنیم.

نخست باید نشان دهیم که cf یک ریخت بدیهی است. فرض کنید $x, y \in A$ با $x\rho y$. از تعریف ζ_f داریم $f(x)\zeta_f f(y)$، زیرا $(f(x), f(y))$ در مجموعه‌ی مولد ζ_f قرار دارد. بنابراین $c(f(x)) = [f(x)]_{\zeta_f} = [f(y)]_{\zeta_f} = c(f(y))$. این نشان می‌دهد که cf روی هر زوج مرتبط توسط ρ مقدار ثابتی می‌گیرد. طبق لم ۲-۲-۸، cf از طریق یک شی بدیهی تجزیه می‌شود، یعنی یک ریخت بدیهی است.

سپس شرط دوم را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $g : (A', \rho') \to (B, \sigma)$ یک ریخت در **Preord** باشد به طوری که gf بدیهی است. باید ریخت یکتای $g' : (A'/\zeta_f, \rho' \vee \zeta_f) \to (B, \sigma)$ را طوری بیابیم که $g = g'c$. از آن‌جا که gf بدیهی است، برای هر $x, y \in A$ با $x\rho y$ داریم $g(f(x)) = g(f(y))$. این یعنی $(f(x), f(y)) \in \sim_g$، که در آن $\sim_g$ رابطه هم‌ارزی متناظر با g است. بنابراین، $\zeta_f \subseteq \sim_g$، زیرا هم‌ارزی شامل همه چنین زوج‌هایی است. حال تابع $g' : A'/\zeta_f \to B$ را به صورت $g'([a']_{\zeta_f}) = g(a')$ تعریف می‌کنیم. از آن‌جا که $\zeta_f \subseteq \sim_g$، این تابع خوش تعریف است. همچنین، $g = g'c$ به طور واضح برقرار است.

اکنون باید نشان دهیم g' یک ریخت در **Preord** است، یعنی اگر $[a]_{\zeta_f}, [\alpha]_{\zeta_f} \in A'/\zeta_f$ و $a(\rho' \vee \zeta_f)\alpha$، آن‌گاه $g'([a]_{\zeta_f})\sigma g'([\alpha]_{\zeta_f})$. از تعریف $\rho' \vee \zeta_f$، دنباله‌ای از عضوهای $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = \alpha$ در A' وجود دارد به طوری که برای هر $0 \leq i \leq n-1$، یا $x_i \zeta_f x_{i+1}$ یا $x_i \rho' x_{i+1}$. اگر $x_i \zeta_f x_{i+1}$، آن‌گاه $[x_i]_{\zeta_f} = [x_{i+1}]_{\zeta_f}$، و در نتیجه $g'([x_i]_{\zeta_f}) = g'([x_{i+1}]_{\zeta_f})$. از آن‌جا که σ بازتابی است، $g'([x_i]_{\zeta_f})\sigma g'([x_{i+1}]_{\zeta_f})$. اگر $x_i \rho' x_{i+1}$، چون g یک ریخت است، $g(x_i)\sigma g(x_{i+1})$، یعنی $g'([x_i]_{\zeta_f})\sigma g'([x_{i+1}]_{\zeta_f})$. در هر دو حالت، $g'([x_i]_{\zeta_f})\sigma g'([x_{i+1}]_{\zeta_f})$. از تراگذری σ نتیجه می‌شود $g'([a]_{\zeta_f})\sigma g'([\alpha]_{\zeta_f})$. پس g' یک ریخت است.

یکتایی g' از این واقعیت ناشی می‌شود که c پوشا است: اگر g'' دیگری با خاصیت $g = g''c$ وجود داشته باشد، برای هر $[a']_{\zeta_f}$ داریم $g''([a']_{\zeta_f}) = g''(c(a')) = g(a') = g'([a']_{\zeta_f})$، یعنی $g'' = g'$. بنابراین، c یک پیش‌هم‌هسته برای f است. □

گزاره ۲-۵-۹. *فرض کنید $f : A \to A'$ یک ریخت در **Preord** باشد.*

۱. *هر پیش‌هم‌هسته‌ای از f یک برووریختی است.*

۲. *اگر $p : A' \to X$ و $q : A' \to Y$ دو پیش‌هم‌هسته از f باشند، آن‌گاه یکریختی یکتای*

$\varphi : X \to Y$ وجود دارد به طوری که $q = \varphi p$.

اثبات. **(۱):** فرض کنید $p : A' \to X$ یک پیش‌هم‌هسته از f باشد. باید نشان دهیم p یک بروریختی است. فرض کنید $g, h : X \to Z$ دو ریخت باشند به طوری که $gp = hp$. از آن‌جا که p یک پیش‌هم‌هسته است و $gp = hp$، و همچنین $gpf = hpf$ که بدیهی است (زیرا pf بدیهی است)، از یکتایی در تعریف پیش‌هم‌هسته نتیجه می‌گیریم $g = h$.

(۲): اگر p و q هر دو پیش‌هم‌هسته از f باشند، آن‌گاه از تعریف پیش‌هم‌هسته، ریخت‌های یکتای $\varphi : X \to Y$ و $\psi : Y \to X$ وجود دارند به طوری که $q = \varphi p$ و $p = \psi q$. از ترکیب این روابط نتیجه می‌گیریم φ و ψ معکوس یکدیگر هستند. □

گزاره ۲-۵-۱۰. *فرض کنید $f : (A, \rho) \to (B, \sigma)$ یک ریخت در رسته* **Preord** *و $\pi : (B, \sigma) \to (B/\zeta_f, \sigma \vee \zeta_f)$ پیش‌هم‌هسته آن باشد. در این‌صورت:*

۱. *$\zeta_f \subseteq \equiv_\sigma$، که در آن $\equiv_\sigma$ رابطه هم‌ارزی تولید شده توسط σ است.*

۲. *اگر $C \subseteq B$ یک زیرمجموعه بسته‌ـ باز باشد، آن‌گاه $\pi(C) \subseteq B/\zeta_f$ یک زیرمجموعه بسته‌ـ باز است.*

اثبات. **اثبات (۱):** طبق تعریف، ζ_f توسط مجموعه

$$G = \{(f(a_۱), f(a_۲)) \mid a_۱, a_۲ \in A,\ a_۱ \rho a_۲\}$$

تولید می‌شود. از آن‌جا که f یک ریخت است، $a_۱ \rho a_۲$ دلالت بر $f(a_۱) \sigma f(a_۲)$ می‌کند. پس $G \subseteq \sigma$. از طرفی، $\equiv_\sigma$ کوچکترین رابطه هم‌ارزی شامل σ است، بنابراین $\sigma \subseteq \equiv_\sigma$. در نتیجه $G \subseteq \equiv_\sigma$ و چون ζ_f کوچکترین رابطه هم‌ارزی شامل G است، داریم $\zeta_f \subseteq \equiv_\sigma$.

اثبات (۲): فرض کنید $C \subseteq B$ بسته‌ـ باز باشد. نشان می‌دهیم $\pi(C)$ در $(B/\zeta_f, \sigma \vee \zeta_f)$ بسته‌ـ باز است. دو عضو دلخواه $\eta \in \pi(C)$ و $\lambda \in (B/\zeta_f) \setminus \pi(C)$ را در نظر بگیرید. بنابر تعریف، $c \in C$ وجود دارد که $\eta = \pi(c)$ و $b \in B \setminus C$ وجود دارد طوری‌که $\lambda = \pi(b)$.

برای نشان دادن بسته‌ـ باز بودن $\pi(C)$، باید ثابت کنیم که $\eta(\sigma \vee \zeta_f)\lambda$ و $\lambda(\sigma \vee \zeta_f)\eta$ هر دو برقرار نیستند. از برقراری $\eta(\sigma \vee \zeta_f)\lambda$ شروع می‌کنیم (برهان برای حالت دوم مشابه است). طبق

تعریف، $\eta(\sigma \vee \zeta_f)\lambda$ یعنی $c(\sigma \vee \zeta_f)b$. بنابراین، دنباله‌ای از عضوهای $x_0 = c, x_1, \ldots, x_n = b$ در B وجود دارد به طوری که برای هر $i = 0, \ldots, n-1$، یا $x_i \sigma x_{i+1}$ یا $x_i \zeta_f x_{i+1}$.

حال با فرض بسته‌ـ باز بودن C نشان می‌دهیم، همه x_iها باید در C باشند، که با $x_n = b \in B \setminus C$ در تناقض است. اثبات با استقرا روی i:

پایه استقرا $(i = 0)$: $x_0 = c \in C$.

گام استقرا: فرض کنید $x_i \in C$. دو حالت داریم:

- اگر $x_i \sigma x_{i+1}$، از آن‌جا که C بسته‌ـ باز است و $x_i \in C$، اگر $x_{i+1} \notin C$، آن‌گاه باید $x_i \not\sigma x_{i+1}$ (تعریف بسته‌ـ باز). بنابراین $x_{i+1} \in C$.

- اگر $x_i \zeta_f x_{i+1}$، از تعریف ζ_f، دنباله $y_0 = x_i, y_1, \ldots, y_m = x_{i+1}$ در B وجود دارد که برای هر $j = 0, \ldots, m-1$، یا $y_j \sigma y_{j+1}$ یا $y_{j+1} \sigma y_j$. اکنون با استقرای دیگری روی j نشان می‌دهیم که همه y_j ها، در C هستند. برای $j = 0$: $y_0 = x_i \in C$. اگر $y_j \in C$ باشد، مشابه استدلال حالت اول، اگر $y_j \sigma y_{j+1}$ یا $y_{j+1} \sigma y_j$، آن‌گاه $y_{j+1} \in C$ (چون در غیر این صورت با بسته‌ـ باز بودن C تناقض دارد). بنابراین با استقرا، $y_m = x_{i+1} \in C$.

در هر دو حالت، $x_{i+1} \in C$. پس با استقرا، $x_n = b \in C$ که با $b \notin C$ تناقض دارد. بنابراین فرض $\eta(\sigma \vee \zeta_f)\lambda$ نادرست است. به طور مشابه $\lambda(\sigma \vee \zeta_f)\eta$ نیز نمی‌تواند برقرار باشد. در نتیجه $\pi(C)$ بسته‌ـ باز است. $\square$

دنباله پیش‌دقیق کوتاه در رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب

تعریف ۲-۵-۱۱. فرض کنید $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ ریخت‌هایی در **Preord** باشند. می‌گوییم دنباله

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

یک **دنباله کوتاه پیش‌دقیق** در **Preord** است اگر f یک پیش‌هسته برای g و g یک پیش‌هم‌هسته برای f باشد.

مثال ۲-۵-۱۲. فرض کنید A یک مجموعه ناتهی، ρ یک رابطه پیش‌مرتبی روی A و $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی A باشد به طوری که $\rho \subseteq \sim$. طبق مثال ۳-۳-۳، ρ یک رابطه پیش‌مرتبی خوش‌تعریف بر روی مجموعه خارج قسمت $A/\sim$ القا می‌کند که آن را نیز با ρ نمایش می‌دهیم. آنگاه دنباله

$$(A, \sim) \xrightarrow{k} (A, \rho) \xrightarrow{\pi} (A/\sim, \rho)$$

که در آن k تابع همانی و π تصویر کانونی است، یک دنباله کوتاه پیش‌دقیق در **Preord** است. با توجه به تعریف، روابط $\sim = \rho \cap \sim = \rho \cap \sim_\pi$ برقرار هستند. از گزاره‌ی ۲-۵-۲ نتیجه می‌گیریم که k یک پیش‌هسته برای π است. علاوه بر این، طبق تعریف داریم $\sim = \zeta_k$ و $\rho = \rho \vee \sim = \rho \vee \zeta_k$. بنابراین، با استناد به گزاره‌ی ۲-۵-۸، π یک پیش‌هم‌هسته برای k است.

به طور خاص، اگر $\simeq_\rho$ رابطه هم‌ارزی روی A باشد که برای هر $a, b \in A$، $a \simeq_\rho b$ اگر و تنها اگر $a\rho b$ و $b\rho a$، و $\leq_\rho$ رابطه ترتیب جزئی روی $A/\simeq_\rho$ که توسط ρ القا می‌شود، در نظر بگیریم، آنگاه دنباله

$$(A, \simeq_\rho) \xrightarrow{k} (A, \rho) \xrightarrow{\pi} (A/\simeq_\rho, \leq_\rho)$$

یک دنباله کوتاه پیش‌دقیق در **Preord** است.

مثال ۲-۵-۱۳. فرض کنید $f : (A, \rho) \to B$ یک ریخت در **Preord** باشد. پیش‌هسته‌ی کانونی $k : (A, \rho \cap \sim_f) \to (A, \rho)$ را برای f در نظر بگیرید (گزاره‌ی ۲-۵-۲). همچنین، طبق گزاره‌ی ۲-۵-۸، پیش‌هم‌هسته‌ی کانونی k را $\pi : (A, \rho) \to (A/\zeta_k, \rho \vee \zeta_k)$ بگیرید. در این صورت،

$$(A, \rho \cap \sim_f) \xrightarrow{k} (A, \rho) \xrightarrow{\pi} (A/\zeta_k, \rho \vee \zeta_k)$$

یک دنباله‌ی پیش‌دقیق کوتاه در **Preord** است. برای اثبات این ادعا، کافی است نشان دهیم که k یک پیش‌هسته برای π است. این مطلب از تساوی‌های $\rho \cap \sim_f = \rho \cap \zeta_k = \rho \cap \sim_\pi$ و گزاره‌ی ۲-۵-۲ نتیجه می‌گیرد.

در گزاره بعدی، همه دنباله‌های پیش‌دقیق کوتاه در رسته **Preord** را، تا یکریختی، معین

می‌کنیم.

گزاره ۲-۵-۱۴. *فرض کنید $(Z,\tau) \xrightarrow{g} (Y,\sigma) \xrightarrow{f} (X,\rho)$ یک دنباله پیش‌دقیق کوتاه در* **Preord** *باشد. در این صورت یک نمودار جابه‌جایی به صورت زیر وجود دارد:*

$$\begin{tikzcd}
(X,\rho) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"'] & (Y,\sigma) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_{(Y,\sigma)}"] & (Z,\tau) \arrow[d, "\cong"] \\
(Y,\sigma\cap \sim_g) \arrow[r, "k"'] & (Y,\sigma) \arrow[r, "\pi"'] & (Y/\zeta_k,\zeta_k\vee\sigma)
\end{tikzcd}$$

که در آن k همانی و π تصویر کانونی است و

$$(Y,\sigma\cap \sim_g) \xrightarrow{k} (Y,\sigma) \xrightarrow{\pi} (Y/\zeta_k,\zeta_k\vee\sigma)$$

یک دنباله پیش‌دقیق کوتاه است.

اثبات. طبق گزاره‌ی ۲-۵-۲، $k:(Y,\sigma\cap\sim_g)\to(Y,\sigma)$ یک پیش‌هسته برای g است. از آن‌جا که بنا به فرض f نیز یک پیش‌هسته برای g است، از گزاره‌ی ۲-۵-۴(۲) نتیجه می‌گیریم که یک یکریختی $(X,\rho)\to(Y,\sigma\cap\sim_g)$ وجود دارد که مربع سمت چپ در نمودار را جابه‌جا می‌کند.

اکنون، از آن‌جا که g یک پیش‌هم‌هسته برای f است، وجود یک یکریختی $(Z,\tau)\to(Y/\zeta_k,\zeta_k\vee\sigma)$ که مربع سمت راست نمودار را جابه‌جا کند، با نشان دادن این‌که π یک پیش‌هم‌هسته برای f است (به کمک گزاره‌ی ۲-۵-۹(۲)) نتیجه می‌شود.

ابتدا ثابت می‌کنیم که πf بدیهی است. اعضای $x,y\in X$ را با $x\rho y$ در نظر بگیرید. از آن‌جا که g یک پیش‌هم‌هسته برای f است، gf بدیهی است و بنابراین $g(f(x))=g(f(y))$، یعنی $f(x)\sim_g f(y)$. همچنین $f(x)\sigma f(y)$ زیرا f یک ریخت است. طبق تعریف، ζ_k توسط $\{(y_1,y_2)\in Y\times Y \mid y_1(\sigma\cap\sim_g)y_2\}$ تولید می‌شود، پس $f(x)\zeta_k f(y)$، یعنی $\pi f(x)=\pi f(y)$. این نشان می‌دهد πf بدیهی است.

حال فرض کنید $\lambda:(Y,\sigma)\to(T,\eta)$ یک ریخت باشد به طوری که λf بدیهی است. باید نشان دهیم ریخت یکتای $\overline{\lambda}:(Y/\zeta_k,\zeta_k\vee\sigma)\to(T,\eta)$ وجود دارد به طوری که $\lambda=\overline{\lambda}\pi$. وجود

چنین λای کافی است، زیرا یکتایی آن نتیجه‌ی ساده‌ای از پوشا بودن π است.

از آن‌جا که g یک پیش‌هم‌هسته برای f و λf بدیهی است، ریخت یکتای $\lambda_1 : (Z,\tau) \to (T,\eta)$ وجود دارد به طوری که $\lambda = \lambda_1 g$. اکنون ζ_k رابطه هم‌ارزی تولید شده توسط $\sigma \cap \sim_g$ است و $\sim_g$ خود یک رابطه هم‌ارزی است، پس $\zeta_k \subseteq \sim_g$. بنابراین λ_1 یک نگاشت خوش‌تعریف $\widetilde{\lambda} : (Y/\zeta_k, \zeta_k \vee \sigma) \to (T,\eta)$ را به صورت $[y]_{\zeta_k} \mapsto \lambda_1(g(y))$ القا می‌کند و به وضوح $\lambda = \widetilde{\lambda}\pi$ برقرار است.

ادعا می‌کنیم λ_1 یک ریخت است. برای این منظور، $[y]_{\zeta_k}, [z]_{\zeta_k} \in Y/\zeta_k$ را با $y(\sigma \vee \zeta_k)z$ در نظر بگیرید و فرض کنید $\beta_1 = y, \beta_2, \dots, \beta_n = z \in Y$ باشند به طوری که برای هر $1 \leq i < n$، یا $\beta_i \sigma \beta_{i+1}$ یا $\beta_i \zeta_k \beta_{i+1}$. در حالت اول، چون g و λ_1 ریخت هستند، $g(\beta_i)\tau g(\beta_{i+1})$ و در نتیجه $\widetilde{\lambda}([\beta_i]_{\zeta_k})\eta\widetilde{\lambda}([\beta_{i+1}]_{\zeta_k})$. در حالت دوم، طبق تعریف $[\beta_i]_{\zeta_k} = [\beta_{i+1}]_{\zeta_k}$. بنابراین در هر دو حالت $\widetilde{\lambda}([\beta_i]_{\zeta_k})\eta\widetilde{\lambda}([\beta_{i+1}]_{\zeta_k})$ برای هر $1 \leq i < n$ برقرار است. از تعدی η نتیجه می‌شود $\widetilde{\lambda}([y]_{\zeta_k})\eta\widetilde{\lambda}([z]_{\zeta_k})$، که اثبات می‌کند $\widetilde{\lambda}$ یک ریخت است.

در نهایت، همان‌طور که در مثال ۲-۵-۱۳ دیدیم، دنباله

$$(Y, \sigma \cap \sim_g) \xrightarrow{k} (Y,\sigma) \xrightarrow{\pi} (Y/\zeta_k, \zeta_k \vee \sigma)$$

یک دنباله پیش‌دقیق کوتاه است. $\square$

۲-۶ نظریه پیش‌تاب در رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب

تعریف ۲-۶-۱. یک **نظریه پیش‌تاب** در یک رسته $\mathcal{C}$، یک زوج $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ از زیررسته‌های پر غیرتهی از $\mathcal{C}$ است که تحت یکریختی بسته هستند و در شرایط زیر صدق می‌کنند. فرض کنید $\mathcal{Z} = \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$.

۱. برای هر شیء X در $\mathcal{C}$، یک دنباله $\mathcal{Z}$ــ پیش‌دقیق کوتاه

$$T \xrightarrow{t} X \xrightarrow{f} F$$

وجود دارد که در آن $T \in \mathcal{T}$ و $F \in \mathcal{F}$.

۲. برای هر $T \in \mathcal{T}$ و هر $F \in \mathcal{F}$، هر ریخت از T به F، $\mathcal{Z}$ـ بدیهی است. یعنی:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, F) = \mathrm{Triv}_{\mathcal{Z}}(T, F).$$

اشیاء در $\mathcal{T}$ را **اشیاء تاب** و اشیاء در $\mathcal{F}$ را **اشیاء آزاد** می‌نامیم. اشیاء در $\mathcal{Z} = \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$ را **اشیاء هم‌تاب و هم‌آزاد** می‌نامیم.

قضیه ۲-۶-۲. *در رسته* **Preord** *مجموعه‌های پیش‌مرتب ناتهی، زوج* $(\mathbf{Equiv}, \mathbf{ParOrd})$ *یک نظریه پیش‌تاب تشکیل می‌دهد. در این نظریه:*

- **Equiv**: *رسته مجموعه‌هایی با یک رابطه هم‌ارزی.*
- **ParOrd**: *رسته مجموعه‌هایی با یک رابطه ترتیب جزئی.*
- $\mathcal{Z} = \mathbf{Equiv} \cap \mathbf{ParOrd} = \mathbf{Triv}$ *، یعنی رسته مجموعه‌هایی که هم رابطه هم‌ارزی و هم ترتیب جزئی هستند. این دقیقاً مجموعه‌هایی با رابطه* ***تساوی*** *هستند.*

اثبات. برای اثبات، باید دو شرط تعریف ۲-۶-۱ را بررسی کنیم.

شرط (۱): وجود تجزیه. برای هر مجموعه پیش‌مرتب (X, ρ)، رابطه هم‌ارزی $\simeq_\rho$ و ترتیب جزئی $\leq_\rho$ روی $X/\simeq_\rho$ را همان‌طور که در بخش‌های قبلی تعریف شد، در نظر می‌گیریم. دنباله زیر را می‌سازیم:

$$(X, \simeq_\rho) \xrightarrow{\iota} (X, \rho) \xrightarrow{\pi} (X/\simeq_\rho, \leq_\rho)$$

که در آن ι همانی (به عنوان یک ریخت که رابطه را ضعیف‌تر می‌کند) و π تصویر کانونی است. در بخش‌های قبلی (گزاره‌های ۲-۵-۲ و ۲-۵-۸) اثبات شد که ι یک $\mathcal{Z}$ـ پیش‌هسته برای π و π یک $\mathcal{Z}$ـ پیش‌هم‌هسته برای ι است. واضح است که $(X, \simeq_\rho) \in \mathbf{Equiv}$ و $(X/\simeq_\rho, \leq_\rho) \in \mathbf{ParOrd}$.
پس شرط اول برقرار است.

شرط (۲): جدایی. فرض کنید $(E, \sim) \in \mathbf{Equiv}$ و $(P, \leq) \in \mathbf{ParOrd}$ و $f : (E, \sim) \to (P, \leq)$ یک ریخت باشد. باید نشان دهیم f $\mathcal{Z}$ـ بدیهی است. فرض کنید $x, y \in E$ با $x \sim y$. از آن‌جا که $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی است، $y \sim x$ نیز برقرار است. چون f یک ریخت است، از $x \sim y$ داریم $f(x) \leq f(y)$ و از $y \sim x$ داریم $f(y) \leq f(x)$. در نتیجه $f(x) \leq f(y)$ و $f(y) \leq f(x)$. از پادتقارن بودن رابطه $\leq$ (زیرا یک ترتیب جزئی است)، نتیجه می‌گیریم $f(x) = f(y)$. این نشان می‌دهد که f روی هر کلاس هم‌ارزی در E ثابت است. بنابراین، f را می‌توان به صورت $f = \bar{f} \circ q$ نوشت، که در آن $q : E \to E/\sim$ تصویر کانونی (با رابطه تساوی روی خارج‌قسمت) و $\bar{f} : E/\sim \to P$ تابعی خوش‌تعریف است. مجموعه‌ی $E/\sim$ با رابطه تساوی، یک شیء بدیهی (یعنی عضوی از $\mathcal{Z}$) است. از آن‌جا که f به صورت ترکیب یک ریخت به یک شیء در $\mathcal{Z}$ و یک ریخت از آن نوشته می‌شود، در نتیجه f یک ریخت $\mathcal{Z}$ـ بدیهی است. $\square$

مثال ۲-۶-۳. مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را با ساختار پیش‌ترتیب زیر در نظر می‌گیریم. در این ساختار، a با b مرتبط است ($a\rho b$) و b و c به طور متقابل مرتبط هستند ($b\rho c$ و $c\rho b$)، همچنین رابطه بازتابی برای همه عضوهای برقرار است.

رابطه تقارنی $\simeq_\rho$ دو کلاس هم‌ارزی ایجاد می‌کند: کلاس $\{a\}$ که تنها شامل a است زیرا این عضو فقط با خودش متقارن است، و کلاس $\{b, c\}$ که شامل هر دو عضو b و c است زیرا این دو با هم متقارن هستند.

مجموعه خارج قسمتی $A/\simeq_\rho = \{[a], [b]\}$ دارای یک ساختار ترتیب جزئی است که در آن $[a] \leq [b]$ برقرار است، زیرا $a\rho b$ در ساختار اصلی صدق می‌کند.

دنباله پیش‌تاب به صورت زیر خواهد بود:

$$(\{a, b, c\}, \simeq_\rho) \xrightarrow{k} (\{a, b, c\}, \rho) \xrightarrow{\pi} (\{[a], [b]\}, \leq)$$

در این دنباله، بخش چپ $(\{a, b, c\}, \simeq_\rho)$ نماینده شیء تاب است که ساختار هم‌ارزی دارد، بخش راست $(\{[a], [b]\}, \leq)$ نماینده شیء آزاد است که ساختار ترتیب جزئی دارد، و ریخت میانی ساختار اصلی را نشان می‌دهد. این مثال به وضوح نشان می‌دهد که چگونه یک مجموعه پیش‌مرتب به مؤلفه‌های تاب و آزاد تجزیه می‌شود.

۲-۷ جمع‌بندی

در این فصل، به مطالعه رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب و ساختارهای مرتبط پرداختیم. مجموعه‌های پیش‌مرتب به عنوان تعمیمی طبیعی از روابط هم‌ارزی و ترتیب‌های جزئی، چهارچوبی یکپارچه برای تحلیل ساختارهای مرتبه‌ای فراهم می‌آورند. بررسی ارتباط بین مجموعه‌های پیش‌مرتب و فضاهای توپولوژی الکساندروف‌ـ گسسته، درک عمیق‌تری از ساختار این رسته ارائه داد. مفاهیم پیش‌هسته و پیش‌هم‌هسته نیز به عنوان ابزارهای اساسی برای تحلیل ریخت‌ها در این رسته مورد بررسی قرار گرفتند. همچنین، نشان دادیم زوج $(\mathbf{Equiv}, \mathbf{ParOrd})$ یک نظریه پیش‌تاب در رسته $\mathbf{Preord}$ است. نظریه پیش‌تاب با زوج $(\mathbf{Equiv}, \mathbf{ParOrd})$، ابزار مناسبی را برای تجزیه مجموعه‌های پیش‌مرتب به مؤلفه‌های تاب و آزاد فراهم کرده است.

فصل ۳

رسته پایدار حاصل از مجموعه‌های پیش‌مرتب

در این فصل به مطالعه رسته پایدار مجموعه‌های پیش‌مرتب و ساختارهای یکریختی در این رسته می‌پردازیم. فاچینی و فینوکیارو نشان داده‌اند [۱۶]، این رسته دارای ساختاری غنی است که به درک بهتر ارتباط بین روابط هم‌ارزی و ترتیب‌های جزئی کمک می‌کند.

در این فصل، ابتدا ساختار دقیق رسته پایدار را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این رسته یک رسته نقطه‌دار است. سپس به مطالعه اشیاء مینیمال و ساختار تجزیه در آن‌ها می‌پردازیم که این بخش به درک ساختار داخلی اشیاء در رسته پایدار کمک می‌کند. در ادامه، ویژگی‌های کلیدی یکریختی‌ها در این رسته را تحلیل کرده و به بررسی مفاهیم هسته، هم‌هسته و دنباله‌های دقیق در این زمینه می‌پردازیم.

۳-۱ ساختار رسته پایدار

تعریف ۳-۱-۱. رسته پایدار <u>**Preord**</u> به عنوان رسته خارج قسمتی $\mathbf{Preord}/R$ تعریف می‌شود که در آن R رابطه هم‌ارزی بر روی مجموعه ریخت‌هاست که به شرح زیر تعریف می‌شود: برای هر دو ریخت $f, g : (A, \rho) \to (A', \rho')$ در **Preord**، می‌گوییم $fR_{A,A'}g$ اگر و تنها اگر زیرمجموعه بسته‌ـ باز B از A وجود داشته باشد به طوری که:

- $f|_B$ و $g|_B$ هر دو ریخت‌های بدیهی باشند،

- $f|_{A\setminus B} = g|_{A\setminus B}$.

ملاحظه ۳-۱-۲. *یک ریخت* $f : (A,\rho) \to (A',\rho')$ *در* **Preord** *را* ***بدیهی*** *می‌نامیم اگر از یک شیء بدیهی عبور کند، یعنی اگر* $a\rho b$ *آن‌گاه* $f(a) = f(b)$ *برای تمام* $a, b \in A$.

لم ۳-۱-۳. *رابطه* R *تعریف شده در بالا یک رابطه هم‌نهشتی رسته‌ای است. به عبارت دیگر، برای هر سه شیء* A, A', A'' *و ریخت‌های* $f, g : A \to A'$ *و* $h : A'' \to A$ *و* $\ell : A' \to A''$ *در* **Preord**، *اگر* $fR_{A,A'}g$ *آن‌گاه* $\ell \circ f \circ h R_{A'',A'''} \ell \circ g \circ h$.

قضیه ۳-۱-۴. *رسته* <u>**Preord**</u> *یک رسته نقطه‌دار است. به عبارت دیگر، این رسته دارای یک شیء صفر است که در آن هر شیء بدیهی* $(T, =)$ *در* **Preord** *به یک شیء صفر در* <u>**Preord**</u> *تبدیل می‌شود.*

اثبات. فرض کنید $(T, =)$ یک شیء بدیهی در **Preord** و (A,ρ) یک شیء دلخواه در <u>**Preord**</u> باشد. برای نشان دادن این‌که $(T, =)$ یک شیء صفر است، باید ثابت کنیم برای هر (A,ρ)، مجموعه‌های $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Preord}}}((A,\rho),(T,=))$ و $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Preord}}}((T,=),(A,\rho))$ هر کدام تنها شامل یک ریخت باشند.

ابتدا $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Preord}}}((A,\rho),(T,=))$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $f, g : (A,\rho) \to (T, =)$ دو ریخت دلخواه در **Preord** باشند. قرار می‌دهیم $B = A$. از آن‌جا که $(T, =)$ یک شیء بدیهی است، هر ریخت به $(T, =)$ بدیهی است. بنابراین $f|_B = f$ و $g|_B = g$ هر دو بدیهی هستند. همچنین $A \setminus B = \emptyset$، پس $f|_{A\setminus B} = g|_{A\setminus B}$. در نتیجه $fR_{A,T}g$، یعنی f و g در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند. پس $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Preord}}}((A,\rho),(T,=))$ تنها دارای یک عضو است.

حال $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Preord}}}((T,=),(A,\rho))$ را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $f, g : (T, =) \to (A,\rho)$ دو ریخت دلخواه باشند. قرار می‌دهیم $B = \emptyset$. در این‌صورت، $f|_B$ و $g|_B$ بدیهی هستند (چون دامنه تهی است). همچنین چون $(T, =)$ بدیهی است، برای هر $t_1, t_2 \in T$، $t_1 = t_2$ پس $f(t_1) = f(t_2)$ و $g(t_1) = g(t_2)$. اما این لزوماً به معنای $f = g$ نیست. با این حال، برای $B = \emptyset$، $T \setminus B = T$ و $f|_{T\setminus B} = f$ و $g|_{T\setminus B} = g$.

توجه می‌کنیم برای این‌که $fR_{T,A}g$ برقرار باشد، باید $f|_{T\setminus B} = g|_{T\setminus B}$، یعنی $f = g$. اما این لزوماً برقرار نیست. برای حل این مشکل، باید از ویژگی دیگر اشیاء بدیهی استفاده کنیم.

در واقع، برای هر دو ریخت $f, g : (T, =) \to (A, \rho)$، قرار می‌دهیم $B = T$. در این‌صورت، $f|_B = f$ و $g|_B = g$ هر دو بدیهی هستند چون اگر $t_۱ = t_۲$ در $(T, =)$، آنگاه $f(t_۱) = f(t_۲)$ (چون $t_۱ = t_۲$). همچنین $T \setminus B = \emptyset$، پس $f|_{T\setminus B} = g|_{T\setminus B}$. بنابراین $f R_{T,A} g$ برای هر دو ریخت f و g. پس $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Preord}}}((T, =), (A, \rho))$ نیز تنها دارای یک عضو است.

این ویژگی‌ها نشان می‌دهد که هر شیء بدیهی در $\underline{\mathbf{Preord}}$ یک شیء صفر است. $\square$

گزاره ۳-۱-۵. *فرض کنید* $F : \mathbf{Preord} \to \underline{\mathbf{Preord}}$ *تابعگون کانونی باشد که هر شیء را به خودش و هر ریخت را به کلاس هم‌ارزی آن می‌نگارد. در این‌صورت،* F *یک تابعگون پُر است و هم‌ضرب‌ها را حفظ می‌کند.*

اثبات. **پُر بودن:** برای نشان دادن پُر بودن F، باید ثابت کنیم که برای هر دو شیء (A, ρ) و (A', ρ') در $\mathbf{Preord}$، تابع

$$F_{A,A'} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Preord}}((A, \rho), (A', \rho')) \to \mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{Preord}}}((A, \rho), (A', \rho'))$$

پوشا است. اما این به طور مستقیم از تعریف رسته خارج قسمتی نتیجه می‌شود، چون هر ریخت در $\underline{\mathbf{Preord}}$ یک کلاس هم‌ارزی از ریخت‌های $\mathbf{Preord}$ است که دقیقاً تصویر یکی از آن‌ها تحت F می‌باشد.

حفظ هم‌ضرب‌ها: فرض کنید $\{(A_i, \rho_i) \mid i \in I\}$ یک خانواده از مجموعه‌های پیش‌مرتب و $(C, \rho) = \coprod_{i \in I} (A_i, \rho_i)$ هم‌ضرب آن‌ها در $\mathbf{Preord}$ باشد. یادآوری می‌کنیم که:

$$C = \{(a, i) \mid i \in I, a \in A_i\}$$

و رابطه ρ به صورت

$(a, i)\rho(b, j)$ اگر و تنها اگر $i = j$ و $a \rho_i b$

تعریف می‌شود.

باید نشان دهیم که $F(C,\rho)$ هم‌ضرب خانواده $\{F(A_i,\rho_i) \mid i \in I\}$ در $\underline{\mathbf{Preord}}$ است. برای این کار، باید خاصیت جهانی هم‌ضرب را بررسی کنیم.

فرض کنید (B,σ) یک شیء دلخواه در $\underline{\mathbf{Preord}}$ و برای هر $i \in I$، یک ریخت $\underline{f_i} : F(A_i,\rho_i) \to F(B,\sigma)$ در $\underline{\mathbf{Preord}}$ داده شده باشد. برای هر i، $\underline{f_i}$ یک کلاس هم‌ارزی از ریخت‌های $f_i : (A_i,\rho_i) \to (B,\sigma)$ در $\mathbf{Preord}$ است.

برای هر $i \in I$، ریخت کانونی $\varepsilon_i : (A_i,\rho_i) \to (C,\rho)$ در $\mathbf{Preord}$ را که $\varepsilon_i(a) = (a,i)$ تعریف می‌کنیم. سپس، برای هر $(a,i) \in C$، ریخت $f : (C,\rho) \to (B,\sigma)$ در $\mathbf{Preord}$ به صورت $f((a,i)) = f_i(a)$ تعریف می‌کنیم. این یک ریخت است، زیرا اگر $(a,i)\rho(b,j)$ آن‌گاه $i = j$ و $a\rho_i b$، پس $f_i(a)\sigma f_i(b)$، چون f_i یک ریخت است، و بنابراین $f((a,i))\sigma f((b,j))$. حال برای هر $i \in I$، و برای هر $a \in A_i$، داریم $(f \circ \varepsilon_i)(a) = f((a,i)) = f_i(a)$. پس در $\mathbf{Preord}$، داریم $f \circ \varepsilon_i = f_i$. بنابراین در $\underline{\mathbf{Preord}}$ نیز داریم $\underline{f} \circ \underline{\varepsilon_i} = \underline{f_i}$.

برای یکتایی، فرض کنید $\underline{g} : F(C,\rho) \to F(B,\sigma)$ ریخت دیگری باشد به طوری که برای هر $i \in I$، $\underline{g} \circ \underline{\varepsilon_i} = \underline{f_i}$. در این‌صورت، برای هر $i \in I$، $g \circ \varepsilon_i R_{A_i,B} f_i$. یعنی برای هر i، زیرمجموعه بسته‌ـباز $B_i \subseteq A_i$ وجود دارد به طوری که $(g \circ \varepsilon_i)|_{B_i}$ و $f_i|_{B_i}$ بدیهی هستند و $(g \circ \varepsilon_i)|_{A_i \setminus B_i} = f_i|_{A_i \setminus B_i}$. از آن‌جا که تصویر B_i تحت ε_i در C، یعنی $B_i \times \{i\}$، در (C,ρ) بسته‌ـباز است (ملاحظه ۲ـ۳ـ۹)، و اجتماع متناهی زیرمجموعه‌های بسته‌ـباز، بسته‌ـباز است (چون فضای الکساندروفـگسسته است)، می‌توانیم $D = \bigcup_{i \in I}(B_i \times \{i\})$ را در نظر بگیریم که در C بسته‌ـباز است.

حال بررسی می‌کنیم که $f|_D$ و $g|_D$ بدیهی هستند. فرض کنید $(a,i),(b,i) \in D \cap (A_i \times \{i\})$ و $(a,i)\rho(b,i)$. در این‌صورت، $a\rho_i b$ در A_i. از آن‌جا که $(g \circ \varepsilon_i)|_{B_i}$ بدیهی است، داریم $g((a,i)) = g((b,i)) = g(\varepsilon_i(b)) = g(\varepsilon_i(a))$. به طور مشابه، $f((a,i)) = f_i(a) = f_i(b) = f((b,i))$ چون $f_i|_{B_i}$ بدیهی است. برای (a,i) و (b,j) با $i \neq j$، چون $(a,i) \not\rho (b,j)$ نیازی به بررسی نیست. بنابراین $f|_D$ و $g|_D$ بدیهی هستند.

برای بخش دوم، فرض کنید $(a,i) \in C \setminus D$. در این‌صورت، $a \in A_i \setminus B_i$، پس $(g \circ \varepsilon_i)(a) = f_i(a)$ یعنی $g((a,i)) = f_i(a) = f((a,i))$. بنابراین $f|_{C \setminus D} = g|_{C \setminus D}$.

در نتیجه $f R_{C,B} g$، یعنی $\underline{f} = \underline{g}$ در $\underline{\mathbf{Preord}}$. این یکتایی $\underline{f}$ را نشان می‌دهد. □

۳-۲ اشیاء مینیمال و ساختار تجزیه

در این بخش، به مطالعه ساختار اشیاء در رسته پایدار می‌پردازیم. یک مفهوم کلیدی در این زمینه، مفهوم اشیاء مینیمال است که به درک ساختار داخلی اشیاء کمک می‌کند.

تعریف ۳-۲-۱. فرض کنید (A,ρ) یک مجموعه پیش‌مرتب باشد. زیرمجموعه A^* از A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A^* = \bigcup\{[a]_{\equiv_\rho} \in A/\equiv_\rho \mid |[a]_{\equiv_\rho}| > 1\}$$

به عبارت دیگر، A^* اجتماع تمام مؤلفه‌های همبندی با بیش از یک عضو است.

تعریف ۳-۲-۲. مجموعه پیش‌مرتب (A,ρ) را **مینیمال** می‌نامیم اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱. A غیربدیهی باشد و $A = A^*$،

۲. A بدیهی باشد و $|A| = 1$.

ملاحظه ۳-۲-۳. *یک مجموعه پیش‌مرتب غیربدیهی، مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر $a \in A$، عضو $b \in A$ با ویژگی $a \neq b$ وجود داشته باشد به طوری که $a\rho b$ یا $b\rho a$.*

این شرط بیان می‌کند که هیچ نقطه مجزای کامل در مجموعه پیش‌مرتب وجود ندارد و مؤلفه‌ها حداقل دو عضو دارند.

قضیه ۳-۲-۴. *برای هر مجموعه پیش‌مرتب (A,ρ)، اشیاء (A,ρ) و $(A^*,\rho|_{A^*})$ در رسته پایدار* **<u>Preord</u>** *یکریخت هستند.*

اثبات. فرض کنید a_0 یک عضو ثابت از A^* باشد. تابع $f : A \to A^*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A^* \\ a_0, & x \notin A^* \end{cases}$$

همچنین، $g : A^* \to A$ را به عنوان تابع شمول در نظر می‌گیریم.

ابتدا نشان می‌دهیم f یک ریخت است. فرض کنید $x\rho y$ در A. چند حالت داریم:

۱. اگر $x, y \in A^*$، آن‌گاه $f(x) = x$ و $f(y) = y$، و از $x\rho y$ نتیجه می‌شود $f(x)\rho f(y)$.

۲. اگر $x \in A^*$ و $y \notin A^*$، آن‌گاه $f(x) = x$ و $f(y) = a_\circ$. از آن‌جا که $y \notin A^*$، $[y]_{\equiv_\rho} = \{y\}$، پس $y \not\rho y'$ و $y' \not\rho y$ برای هر $y \neq y'$. به طور خاص، $x \not\rho y$ چون $x \in A^*$ و $x \neq y$. اما فرض کردیم $x\rho y$، پس این حالت غیرممکن است.

۳. اگر $x \notin A^*$ و $y \in A^*$، به طور مشابه، این حالت غیرممکن است چون $x \notin A^*$ یعنی $[x]_{\equiv_\rho} = \{x\}$، پس $x \not\rho y$ برای $x \neq y$.

۴. اگر $x, y \notin A^*$، آن‌گاه $f(x) = a_\circ$ و $f(y) = a_\circ$، پس $f(x) = f(y)$. از آن‌جا که $x\rho y$ و $x \not\rho x'$ برای $x \neq x'$ (چون $x \notin A^*$)، باید $x = y$. بنابراین $a_\circ \rho a_\circ$ چون ρ بازتابی است، پس $f(x)\rho f(y)$.

بنابراین f یک ریخت است.

تابع g به وضوح یک ریخت است چون شمول یک زیرمجموعه است.

حال باید نشان دهیم $g \circ f$ معادل ریخت همانی روی (A, ρ) است و $f \circ g$ معادل ریخت همانی روی $(A^*, \rho|_{A^*})$ است. برای $g \circ f : A \to A$ داریم:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x, & x \in A^* \\ a_\circ, & x \notin A^* \end{cases}$$

ریخت همانی $\iota_A : A \to A$ نیز به صورت $\iota_A(x) = x$ برای هر $x \in A$ است. قرار می‌دهیم $B = A \setminus A^*$. طبق تعریف A^*، B یک شیء بدیهی است (مؤلفه‌های تک‌عضوی)، پس B بسته‌ـباز است. با توجه به این‌که:

الف) $(g \circ f)|_B$ بدیهی است چون برای $x, y \in B$ با $x\rho y$، باید $x = y$ (چون B بدیهی است)، پس $(g \circ f)(x) = a_\circ = (g \circ f)(y)$.

ب) $\iota_A|_B$ بدیهی است چون برای $x, y \in B$ با $x\rho y$، $x = y$ پس $\iota_A(x) = x = y = \iota_A(y)$.

ج) $(g \circ f)|_{A\setminus B} = (g \circ f)|_{A^*}$ و $\iota_A|_{A\setminus B} = \iota_A|_{A^*}$. برای $x \in A^*$، $\iota_A(x) = x = (g \circ f)(x)$، پس $(g \circ f)|_{A^*} = \iota_A|_{A^*}$.

بنابراین $(g \circ f) R_{A,A} \iota_A$، یعنی $\underline{g \circ f} = \underline{\iota_A}$ در **Preord**.

برای $f \circ g : A^* \to A^*$، داریم $(f \circ g)(x) = x$ برای هر $x \in A^*$، چون $g(x) = x \in A^*$ و $f(x) = x$ برای $x \in A^*$. پس $f \circ g = \iota_{A^*}$، بنابراین به وضوح $\underline{f \circ g} = \underline{\iota_{A^*}}$.

این نشان می‌دهد که $\underline{f}$ و $\underline{g}$ معکوس یکدیگر هستند، پس (A, ρ) و $(A^*, \rho|_{A^*})$ در **Preord** یکریخت هستند. □

این نتیجه نشان می‌دهد که در رسته پایدار، می‌توان بخش‌های بدیهی یک مجموعه پیش‌مرتب (مؤلفه‌های تک‌عضوی) را نادیده گرفت.

گزاره ۳-۲-۵. *اگر (A^*, ρ) یک مجموعه پیش‌مرتب مینیمال و f یک درون‌ریخت از (A^*, ρ) باشد به طوری که f معادل ریخت همانی باشد (یعنی $f R_{A^*,A^*} \iota_{A^*}$)، آنگاه f خود همان ریخت همانی است.*

اثبات. فرض کنید $f R_{A^*,A^*} \iota_{A^*}$. پس زیرمجموعه بسته‌ــ باز B از A^* وجود دارد به طوری که:

الف) $f|_B$ و $\iota_{A^*}|_B$ هر دو ریخت‌های بدیهی هستند،

ب) $f|_{A^*\setminus B} = \iota_{A^*}|_{A^*\setminus B}$.

از آن‌جا که $\iota_{A^*}|_B$ بدیهی است، برای هر $x, y \in B$ با $x\rho y$، داریم $\iota_{A^*}(x) = \iota_{A^*}(y)$، یعنی $x = y$. این به آن معناست که B یک شیء بدیهی است.

اما (A^*, ρ) مینیمال است، پس هیچ مولفه همبندی تک‌عضوی ندارد. طبق لم ۲-۴-۴، هر زیرمجموعه بسته‌ــ باز از A^* اجتماعی از مولفه‌های همبندی است. از آن‌جا که B بسته‌ــ باز و بدیهی است، باید $B = \emptyset$ یا B اجتماعی از مولفه‌های تک‌عضوی باشد. اما چون (A^*, ρ) مینیمال است، هیچ مولفه تک‌عضوی ندارد، پس $B = \emptyset$.

بنابراین $f|_{A^*\setminus B} = f|_{A^*} = \iota_{A^*}|_{A^*} = \iota_{A^*}$، پس $f = \iota_{A^*}$. □

قضیه ۳-۲-۶. *دو مجموعه پیش‌مرتب مینیمال* (A^*,ρ) *و* (A'^*,ρ') *در رسته* $\underline{\mathbf{Preord}}$ *یکریخت هستند اگر و تنها اگر در رسته* $\mathbf{Preord}$ *یکریخت باشند.*

اثبات. اگر (A^*,ρ) و (A'^*,ρ') در $\mathbf{Preord}$ یکریخت باشند، واضح است که در $\underline{\mathbf{Preord}}$ نیز یکریخت هستند.

برعکس، فرض کنید (A^*,ρ) و (A'^*,ρ') در $\underline{\mathbf{Preord}}$ یکریخت باشند. در این‌صورت، ریخت‌های $\underline{f}:(A^*,\rho)\to(A'^*,\rho')$ و $\underline{g}:(A'^*,\rho')\to(A^*,\rho)$ در $\underline{\mathbf{Preord}}$ وجود دارند به طوری که $\underline{g}\circ\underline{f}=\underline{\iota_{A^*}}$ و $\underline{f}\circ\underline{g}=\underline{\iota_{A'^*}}$.

این به آن معناست که $(g\circ f)R_{A^*,A^*}\iota_{A^*}$ و $(f\circ g)R_{A'^*,A'^*}\iota_{A'^*}$. با توجه به گزاره ۳-۲-۵، از آن‌جا که (A^*,ρ) و (A'^*,ρ') مینیمال هستند، داریم $g\circ f=\iota_{A^*}$ و $f\circ g=\iota_{A'^*}$ در $\mathbf{Preord}$، یعنی f و g معکوس یکدیگر هستند. بنابراین (A^*,ρ) و (A'^*,ρ') در $\mathbf{Preord}$ یکریخت هستند. $\square$

گزاره ۳-۲-۷. *دو مجموعه پیش‌مرتب دلخواه* (A,ρ) *و* (A',ρ') *در رسته* $\underline{\mathbf{Preord}}$ *یکریخت هستند اگر و تنها اگر زیرمجموعه‌های بسته‌ـ باز* $X\subseteq A$ *و* $X'\subseteq A'$ *وجود داشته باشند به طوری که:*

۱. *X و X' با روابط القایی، اشیاء بدیهی یا مجموعه‌های تهی باشند،*

۲. *$A\setminus X$ و $A'\setminus X'$ با روابط القایی، در $\mathbf{Preord}$ یکریخت باشند یا هر دو تهی باشند.*

اثبات. $(\Leftarrow)$: فرض کنید (A,ρ) و (A',ρ') در $\underline{\mathbf{Preord}}$ یکریخت باشند. قرار دهید $X=A\setminus A^*$ و $X'=A'\setminus A'^*$. طبق لم ۲-۴-۴، X و X' بسته‌ـ باز و با روابط القایی، اشیاء بدیهی هستند.
از آن‌جا که $(A,\rho)\cong(A^*,\rho|_{A^*})$ و $(A',\rho')\cong(A'^*,\rho'|_{A'^*})$ در $\underline{\mathbf{Preord}}$، داریم $(A^*,\rho|_{A^*})\cong(A'^*,\rho'|_{A'^*})$ در $\underline{\mathbf{Preord}}$. طبق قضیه ۳-۲-۶، چون $(A^*,\rho|_{A^*})$ و $(A'^*,\rho'|_{A'^*})$ مینیمال هستند، در $\mathbf{Preord}$ نیز یکریخت هستند.

$(\Rightarrow)$: فرض کنید زیرمجموعه‌های بسته‌ـ باز $X\subseteq A$ و $X'\subseteq A'$ وجود داشته باشند که شرایط مورد نظر برقرار باشد. فرض کنید $\varphi:A\setminus X\to A'\setminus X'$ یکریختی در $\mathbf{Preord}$ باشد. از آن‌جا که X و X' بدیهی هستند، $A^*=(A\setminus X)^*$ و $A'^*=(A'\setminus X')^*$. پس $(A\setminus X)^*\cong(A'\setminus X')^*$ در $\mathbf{Preord}$ (چون اگر $A\setminus X$ و $A'\setminus X'$ در $\mathbf{Preord}$ یکریخت باشند، مؤلفه‌های همبندی متناظر آن‌ها نیز یکریخت هستند). بنابراین $A^*\cong A'^*$ در $\mathbf{Preord}$.

حال ریخت $f : A \to A'$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(a) = \begin{cases} \varphi(a), & a \in A \setminus X \\ a'_{\circ}, & a \in X \end{cases}$$

که در آن $a'_{\circ}$ یک نقطه ثابت در $A' \setminus X'$ است (اگر $A' \setminus X' = \emptyset$، آن‌گاه $A' = X'$ بدیهی است و یک تابع دلخواه تعریف می‌کنیم).

به طور مشابه، ریخت $g : A' \to A$ تعریف می‌کنیم:

$$g(a') = \begin{cases} \varphi^{-1}(a'), & a' \in A' \setminus X' \\ a_{\circ}, & a' \in X' \end{cases}$$

که در آن $a_{\circ}$ یک نقطه ثابت در $A \setminus X$ است.

با استدلال مشابه قضیه ۳-۲-۶، می‌توان نشان داد که $\underline{g} \circ \underline{f} = \underline{\iota_A}$ و $\underline{f} \circ \underline{g} = \underline{\iota_{A'}}$ در **Preord**. بنابراین (A, ρ) و (A', ρ') در **Preord** یکریخت هستند. □

برووریختی و تکریختی در رسته پایدار

در این بخش، ویژگی‌های ریخت‌ها در رسته پایدار را مطالعه می‌کنیم. به خصوص، شرایط لازم و کافی برای تکریختی و برووریختی بودن را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۳-۲-۸. *فرض کنید* $f : (A, \rho) \to (A', \rho')$ *یک ریخت در* **Preord** *باشد. در این‌صورت،* $\underline{f}$ *در* **Preord** *برووریختی است اگر و تنها اگر* f *تکریختی در* **Preord** *باشد.*

اثبات. $(\Rightarrow)$: فرض کنید f یک‌به‌یک باشد و $\underline{g}, \underline{h} : (A', \rho') \to (B, \sigma)$ ریخت‌هایی در **Preord** باشند به طوری که $\underline{g} \circ \underline{f} = \underline{h} \circ \underline{f}$. این به آن معناست که $(g \circ f) R_{A,B} (h \circ f)$، یعنی زیرمجموعه بسته‌ـ باز $C \subseteq A$ وجود دارد به طوری که:

الف) $(g \circ f)|_C$ و $(h \circ f)|_C$ بدیهی هستند،

ب) $(g \circ f)|_{A \setminus C} = (h \circ f)|_{A \setminus C}$.

از آن‌جا که f یک‌به‌یک است، می‌توانیم $D = f(C) \subseteq A'$ در نظر بگیریم. می‌توان نشان داد که D بسته‌ـ باز است. سپس بررسی می‌کنیم که $g|_D$ و $h|_D$ بدیهی هستند و $g|_{A' \setminus D} = h|_{A' \setminus D}$. به طور مشابه با اثبات‌های قبل، می‌توان نشان داد که $\underline{g} = \underline{h}$، پس $\underline{f}$ یک بروریختی است.

($\Leftarrow$): فرض کنید $\underline{f}$ یک بروریختی باشد اما f یک‌به‌یک نباشد. در این‌صورت، $a_۱, a_۲ \in A$ با $a_۱ \neq a_۲$ وجود دارند به طوری که $f(a_۱) = f(a_۲)$. دو ریخت $g, h : (A \sqcup A, \rho \sqcup \rho) \to (A, \rho)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x,i) = \begin{cases} a_۱, & i = ۱ \\ x, & i = ۲ \end{cases} \quad \text{و} \quad h(x,i) = \begin{cases} a_۲, & i = ۱ \\ x, & i = ۲ \end{cases}$$

می‌توان نشان داد که $(f \circ g) R_{A \sqcup A, A'} (f \circ h)$ چون $f(a_۱) = f(a_۲)$. پس $\underline{f} \circ \underline{g} = \underline{f} \circ \underline{h}$. اما از آن‌جا که $\underline{f}$ یک بروریختی است، باید $\underline{g} = \underline{h}$. اما این به آن معناست که g و h معادل هستند، که نیازمند وجود زیرمجموعه بسته‌ـ بازی است که g و h روی آن بدیهی باشند و خارج از آن برابر باشند. این در حالت کلی برقرار نیست مگر $a_۱ = a_۲$، که تناقض است. بنابراین f باید یک‌به‌یک باشد. $\square$

ملاحظه ۳-۲-۹. *این نتیجه نشان می‌دهد که در رسته پایدار* $\underline{\textbf{Preord}}$*، بروریختی‌ها با ریخت‌های یک‌به‌یک در رسته اصلی* **Preord** *متناظر هستند.*

۳-۳ هسته و هم‌هسته در رسته پایدار

در این بخش، مفاهیم هسته و هم‌هسته را در رسته پایدار $\underline{\textbf{Preord}}$ مطالعه می‌کنیم.

تعریف ۳-۳-۱. در یک رسته نقطه‌دار، **هسته** ریخت $f : A \to B$، ریخت $k : K \to A$ است به طوری که:

۱. $f \circ k = ۰$،

۲. برای هر ریخت $k' : K' \to A$ با $f \circ k' = 0$، ریخت یکتای $u : K' \to K$ وجود دارد با $k' = k \circ u$.

گزاره ۳-۳-۲. *فرض کنید* $f : (A, \rho) \to (A', \rho')$ *یک ریخت در* **Preord** *و* $k : (A, \rho \cap \sim_f) \to (A, \rho)$ *پیش‌هسته آن در* **Preord** *باشد. در این‌صورت،* $\underline{k}$ *هسته* $\underline{f}$ *در رسته پایدار* **<u>Preord</u>** *است.*

اثبات. برای نشان دادن این که $\underline{k}$ هسته $\underline{f}$ است، باید دو شرط تعریف را بررسی کنیم.

شرط اول: $\underline{f} \circ \underline{k} = 0$. از آن‌جا که $f \circ k$ در **Preord** بدیهی است (گزاره ۲-۵-۲)، در **<u>Preord</u>** برابر با ریخت صفر است.

شرط دوم: فرض کنید $\underline{k'} : (K', \tau) \to (A, \rho)$ یک ریخت در **<u>Preord</u>** باشد با $\underline{f} \circ \underline{k'} = 0$. این بدان معناست که $f \circ k'$ در **Preord** بدیهی است. بنابر گزاره ۲-۵-۲، ریخت یکتای $u : (K', \tau) \to (A, \rho \cap \sim_f)$ در **Preord** وجود دارد با $k' = k \circ u$. بنابراین در **<u>Preord</u>** نیز $\underline{k'} = \underline{k} \circ \underline{u}$.

برای یکتایی $\underline{u}$، فرض کنید $\underline{v} : (K', \tau) \to (A, \rho \cap \sim_f)$ ریخت دیگری در **<u>Preord</u>** باشد با $\underline{k'} = \underline{k} \circ \underline{v}$. در این‌صورت، $k \circ u$ و $k \circ v$ معادل هستند. از آن‌جا که k یک پیش‌هسته است، طبق گزاره ۲-۵-۴ در **<u>Preord</u>** یک یکریختی است، پس باید $\underline{u} = \underline{v}$. □

گزاره ۳-۳-۳. *فرض کنید* (A, ρ) *یک مجموعه پیش‌مرتب و* $\sim$ *یک رابطه هم‌ارزی روی* A *باشد. رابطه* ρ *یک رابطه پیش‌ترتیب* ρ' *روی مجموعه خارج قسمتی* $A/\sim$ *به صورت زیر القا می‌کند:*

$$[a_1]_\sim \rho' [a_2]_\sim \Leftrightarrow (\forall a_1, a_2 \in A)\, a_1 \rho a_2 \Leftrightarrow \sim \subseteq \rho.$$

اثبات. اگر رابطه ρ' روی $A/\sim$ یک رابطه بازتابی خوش‌تعریف باشد، آنگاه $a_1 \sim a_2$ مستلزم $[a_1]_\sim = [a_2]_\sim$ است، بنابراین $[a_1]_\sim \rho' [a_2]_\sim$، یعنی $a_1 \rho a_2$. این ثابت می‌کند $\sim \subseteq \rho$.

برعکس، اگر $\sim \subseteq \rho$، آنگاه $[a_1]_\sim = [a_2]_\sim$ و $[a_3]_\sim = [a_4]_\sim$ مستلزم $a_1 \rho a_3$ اگر و تنها اگر $a_2 \rho a_4$ است، که خوش‌تعریف بودن ρ' را تضمین می‌کند.

اگر این دو شرط معادل برقرار باشند، آنگاه تصویر کانونی $\pi : A \to A/\sim$ یک ریخت در **Preord** است و پیش‌هسته آن همانی $k : (A, \sim) \to (A, \rho)$ است.

($\rho' \Leftarrow \rho \subseteq\sim$): فرض کنید ρ' خوش‌تعریف باشد. برای هر $a_1, a_2 \in A$ با $a_1 \sim a_2$، داریم $[a_1]_\sim = [a_2]_\sim$. از آن‌جا که ρ' بازتابی است (به عنوان یک پیش‌ترتیب)، $[a_1]_\sim \rho' [a_1]_\sim$. اما از برابری کلاس‌ها، $[a_1]_\sim \rho' [a_2]_\sim$. طبق تعریف ρ'، این یعنی $a_1 \rho a_2$. بنابراین $\rho \subseteq\sim$.

($\rho \subseteq\sim \Leftarrow \rho'$): فرض کنید $\rho \subseteq\sim$. برای نشان دادن خوش‌تعریف بودن ρ'، فرض کنید $[a_1]_\sim = [a_2]_\sim$ و $[a_3]_\sim = [a_4]_\sim$. باید ثابت کنیم $a_1 \rho a_3$ اگر و تنها اگر $a_2 \rho a_4$.

اگر $a_1 \rho a_3$، از $[a_1]_\sim = [a_2]_\sim$ داریم $a_1 \sim a_2$، و از $\rho \subseteq\sim$ نتیجه می‌گیریم $a_1 \rho a_2$ و $a_2 \rho a_1$ (چون $\sim$ متقارن است). به طور مشابه، از $[a_3]_\sim = [a_4]_\sim$ داریم $a_3 \rho a_4$ و $a_4 \rho a_3$. حال از $a_2 \rho a_1$ و $a_1 \rho a_3$ و $a_3 \rho a_4$، با اعمال تراگذری ρ دو بار، به $a_2 \rho a_4$ می‌رسیم. برعکس، اگر $a_2 \rho a_4$، با استدلالی مشابه $a_1 \rho a_3$ حاصل می‌شود.

پس ρ' خوش‌تعریف است. بازتابی و تراگذری ρ' نیز مستقیماً از بازتابی و تراگذری ρ و تعریف ρ' نتیجه می‌گیریم. $\square$

ملاحظه ۳-۳-۴. *برای سادگی نمادگذاری، هرگاه $\rho \subseteq\sim$، پیش‌ترتیب القا شده توسط ρ روی $A/\sim$ را نیز با همان نماد ρ نشان می‌دهیم.*

گزاره ۳-۳-۵. *فرض کنید A یک مجموعه و $\sim$ و ρ به ترتیب یک رابطه هم‌ارزی و یک پیش‌ترتیب روی A باشند به طوری که $\rho \subseteq\sim$. همان‌طور که قبلا دیدیم، تصویر کانونی $\pi : (A, \rho) \to (A/\sim, \rho)$ یک ریخت در* **Preord** *است. در این صورت:*

۱. *اگر $B \subseteq A$ یک زیرمجموعه بسته‌ـ باز باشد، آن‌گاه $\pi(B)$ در $Q := A/\sim$ بسته‌ـ باز است.*

۲. *$\underline{\pi}$ یک بروریختی در* **<u>Preord</u>** *است.*

اثبات. **(۱):** فرض کنید $B \subseteq A$ بسته‌ـ باز باشد. دو عضو دلخواه $p \in \pi(B)$ و $q \in Q \setminus \pi(B)$ را در نظر بگیرید. طبق تعریف، $p = \pi(b)$ برای یک $b \in B$ و $q = \pi(x)$ برای یک $x \in A \setminus B$. از آن‌جا که B بسته‌ـ باز است، داریم $b \not\rho x$ و $x \not\rho b$.

اگر $p \rho q$ در Q، آن‌گاه طبق تعریف پیش‌ترتیب القایی روی خارج قسمت، باید $b \rho x$ در A، که با $b \not\rho x$ در تناقض است. به طور مشابه، اگر $q \rho p$، آن‌گاه $x \rho b$، که با $x \not\rho b$ در تناقض است. پس $\pi(B)$ در Q بسته‌ـ باز است.

(۲): فرض کنید (T,τ) یک مجموعه پیش‌مرتب دلخواه و $g,h : (A/{\sim},\rho) \to (T,\tau)$ دو ریخت در **Preord** باشند به طوری که $\underline{g}\circ\underline{\pi} = \underline{h}\circ\underline{\pi}$ در **$\underline{\text{Preord}}$**. این برابری به معنای آن است که $g\pi$ و $h\pi$ در **Preord** تحت رابطه هم‌ارزی R معادل هستند. بنابراین، زیرمجموعه بسته‌ـ باز $B \subseteq A$ وجود دارد به طوری که:

الف) $(g\pi)|_B$ و $(h\pi)|_B$ هر دو ریخت‌های بدیهی در **Preord** هستند،

ب) $(g\pi)|_{A\backslash B} = (h\pi)|_{A\backslash B}$.

از قسمت (۱)، می‌دانیم که $B' := \pi(B)$ یک زیرمجموعه بسته‌ـ باز از $Q = A/{\sim}$ است. همچنین به سادگی می‌توان دید که $\pi(A\backslash B) = Q\backslash B'$. از آن‌جا که $(g\pi)|_B$ بدیهی است، برای هر $b_1, b_2 \in B$ با $b_1\rho b_2$، داریم $g(\pi(b_1)) = g(\pi(b_2))$. این نشان می‌دهد که g روی B' ثابت است، یعنی $g|_{B'}$ یک ریخت بدیهی است. به طور مشابه، $h|_{B'}$ نیز بدیهی است. همچنین، برای هر $x \in A \setminus B$، داریم $g(\pi(x)) = h(\pi(x))$، و از آن‌جا که $\pi(A \setminus B) = Q \setminus B'$، نتیجه می‌گیریم که $g|_{Q\backslash B'} = h|_{Q\backslash B'}$.

پس شرایط تعریف رابطه R برقرار است: $g|_{B'}$ و $h|_{B'}$ بدیهی هستند و $g|_{Q\backslash B'} = h|_{Q\backslash B'}$. بنابراین $\underline{g} = \underline{h}$ در **$\underline{\text{Preord}}$**. این نشان می‌دهد که $\underline{\pi}$ یک بروریختی در **$\underline{\text{Preord}}$** است. □

با توجه به گزاره‌های ۳-۳-۵ و ۲-۵-۱۰ نتیجه زیر را خواهیم داشت:

نتیجه ۳-۳-۶. *فرض کنید $f : (A,\rho) \to (B,\sigma)$ یک ریخت در رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب و $\pi : (B,\sigma) \to (B/\zeta_f, \sigma\vee\zeta_f)$، پیش‌هم‌هسته آن باشد. در این‌صورت $\underline{\pi} : (B,\sigma) \to (B/\zeta_f, \sigma\vee\zeta_f)$ یک بروریختی در **$\underline{\text{Preord}}$** است.*

اثبات. **اثبات (۳):** برای نشان دادن این‌که $\underline{\pi}$ یک بروریختی در رسته پایدار **$\underline{\text{Preord}}$** است، فرض کنید $g,h : (B/\zeta_f, \sigma\vee\zeta_f) \to (T,\tau)$ دو ریخت باشند به طوری که $g\underline{\pi} = h\underline{\pi}$ در **$\underline{\text{Preord}}$**. این یعنی $g\pi$ و $h\pi$ در **Preord** تحت رابطه هم‌ارزی R معادل هستند . بنابراین، زیرمجموعه بسته‌ـ باز $D \subseteq B$ وجود دارد به طوری که:

الف) $(g\pi)|_D$ و $(h\pi)|_D$ هر دو ریخت‌های بدیهی هستند.

ب) $(g\pi)|_{B\backslash D} = (h\pi)|_{B\backslash D}$.

از قسمت (۲) این گزاره، می‌دانیم $\pi(D)$ یک زیرمجموعه بسته‌ــ باز از B/ζ_f است. همچنین، به سادگی می‌توان دید که $\pi(B \setminus D) = (B/\zeta_f) \setminus \pi(D)$. حال، برابری $(g\pi)|_{B\setminus D} = (h\pi)|_{B\setminus D}$ دلالت بر $g|_{\pi(B\setminus D)} = h|_{\pi(B\setminus D)}$ می‌کند. همچنین، از بدیهی بودن $(g\pi)|_D$ و $(h\pi)|_D$، و تعریف بدیهی بودن، نتیجه می‌گیریم که $g|_{\pi(D)}$ و $h|_{\pi(D)}$ نیز ریخت‌هایی بدیهی هستند (زیرا اگر $g\pi$ روی D ثابت باشد، g روی $\pi(D)$ ثابت است). بنابراین، g و h روی $\pi(D)$ با هم برابرند (هر دو ثابت) و روی متمم آن نیز با هم برابرند. این یعنی $gR_{B/\zeta_f,T}h$، و در نتیجه $\underline{g} = \underline{h}$ در **Preord**. پس $\underline{\pi}$ یک بروریختی است. □

تعریف ۳-۳-۷. در یک رسته نقطه‌دار، **هم‌هسته** یک ریخت $f : A \to B$، یک ریخت $p : B \to C$ است به طوری که:

۱. $p \circ f = 0$،

۲. برای هر ریخت $p' : B \to C'$ با $p' \circ f = 0$، ریخت یکتای $u : C \to C'$ وجود دارد به طوری که $p' = u \circ p$.

گزاره ۳-۳-۸. *فرض کنید $f : (A, \rho) \to (B, \sigma)$ یک ریخت در* **Preord** *و*

$$\pi : (B, \sigma) \to (B/\zeta_f, \sigma \vee \zeta_f)$$

یک پیش‌هم‌هسته برای f باشد. در این‌صورت، $\underline{\pi}$ یک هم‌هسته برای $\underline{f}$ در رسته پایدار **Preord** *است.*

اثبات. برای اثبات این‌که $\underline{\pi}$ یک هم‌هسته برای $\underline{f}$ در رسته نقطه‌دار **Preord** است، باید دو شرط اساسی تعریف هم‌هسته را بررسی کنیم:

شرط اول: $\underline{\pi} \circ \underline{f} = \underline{0}$ در **Preord**.

از آن‌جا که π یک پیش‌هم‌هسته برای f است، طبق تعریف داریم πf یک ریخت بدیهی در **Preord** است. در رسته پایدار **Preord**، هر ریخت بدیهی معادل ریخت صفر است. بنابراین:

$$\underline{\pi} \circ \underline{f} = \underline{\pi f} = \underline{0}$$

شرط دوم: خاصیت جهانی هم‌هسته.

فرض کنید $g : (B, \sigma) \to (C, \tau)$ یک ریخت در **Preord** باشد به طوری که $\underline{g} \circ \underline{f} = \underline{\circ}$ در **Preord**. این شرط معادل آن است که gf یک ریخت بدیهی در **Preord** باشد.

از آن‌جا که π یک پیش‌هم‌هسته برای f است و gf بدیهی است، طبق گزاره ۲-۵-۸، ریخت یکتای $g' : (B/\zeta_f, \sigma \vee \zeta_f) \to (C, \tau)$ در **Preord** وجود دارد به طوری که $g = g'\pi$. در رسته پایدار **Preord**، این رابطه به صورت $\underline{g} = \underline{g'} \circ \underline{\pi}$ در می‌آید.

برای اثبات یکتایی $\underline{g'}$ در **Preord**، فرض کنید $\underline{g''} : (B/\zeta_f, \sigma \vee \zeta_f) \to (C, \tau)$ ریخت دیگری در **Preord** باشد به طوری که $\underline{g} = \underline{g''} \circ \underline{\pi}$. این یعنی g و $g''\pi$ در **Preord** تحت رابطه R معادل هستند.

از گزاره ۲-۵-۱۰ می‌دانیم که $\underline{\pi}$ یک بروریختی در **Preord** است. خاصیت بروریختی $\underline{\pi}$ تضمین می‌کند که اگر $\underline{g'} \circ \underline{\pi} = \underline{g''} \circ \underline{\pi}$، آنگاه $\underline{g'} = \underline{g''}$. پس $\underline{g'}$ یکتاست و $\underline{\pi}$ در واقع یک هم‌هسته برای $\underline{f}$ در **Preord** است. □

ملاحظه ۳-۳-۹. *این نتیجه اهمیت ساختار رسته پایدار را نشان می‌دهد: در حالی که π در* Preord *تنها یک پیش‌هم‌هسته است (یعنی دارای خاصیت جهانی نسبت به ریخت‌های بدیهی)، در رسته پایدار* **Preord** *به یک هم‌هسته واقعی تبدیل می‌شود (یعنی دارای خاصیت جهانی نسبت به ریخت‌های صفر). این انتقال از مفهوم "بدیهی" به مفهوم "صفر" در درک ارتباط بین نظریه پیش‌تاب در* Preord *و نظریه تاب کلاسیک در رسته‌های نقطه‌دار اهمیت دارد.*

۳-۴ دنباله‌های دقیق در رسته پایدار

در این بخش به مطالعه دنباله‌های دقیق کوتاه در رسته پایدار **Preord** می‌پردازیم. همان‌طور که در بخش‌های پیشین مشاهده کردیم، رسته **Preord** یک رسته نقطه‌دار است، یعنی دارای یک شیء صفر است. این ویژگی امکان تعریف و مطالعه مفهوم دنباله‌های دقیق کوتاه را فراهم می‌آورد.

تعریف ۳-۴-۱. در یک رسته نقطه‌دار $\mathcal{C}$، یک **دنباله دقیق کوتاه** جفت ریخت‌های $f : A \to B$ و $g : B \to C$ است که در شرایط زیر صدق کنند:

۱. f یک هسته برای g باشد.

۲. g یک هم‌هسته برای f باشد.

به طور نمادین، چنین دنباله‌ای را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

ملاحظه ۳-۴-۲. *در یک دنباله دقیق کوتاه* $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$*، ترکیب* $g \circ f$ *همواره یک ریخت صفر است. این نتیجه مستقیم از این واقعیت است که* f *هسته‌ی* g *است و بنابراین* $g \circ f = 0$.

هدف اصلی در ادامه این بخش، توصیف کامل تمام دنباله‌های دقیق کوتاه در رسته پایدار $\underline{\mathbf{Preord}}$ تا حد یکریختی است. این کار مشابه توصیف دنباله‌های دقیق کوتاه در رسته $\mathbf{Mod}_R$ مدول‌ها روی یک حلقه R است، که در آن هر دنباله دقیق کوتاه با دنباله‌ای از فرم $0 \to A_R \to B_R \to B_R/A_R \to 0$ یکریخت است.

گزاره ۳-۴-۳. *برای هر دنباله دقیق کوتاه*

$$0 \longrightarrow \underline{A} \xrightarrow{f} \underline{(B,\rho)} \xrightarrow{g} \underline{C} \longrightarrow 0$$

در رسته پایدار $\underline{\mathbf{Preord}}$*، یک نمودار جابه‌جایی به صورت زیر وجود دارد:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"] & \underline{(B,\rho)} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_{\underline{(B,\rho)}}"] & \underline{C} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{(B,\rho\cap\sim_g)} \arrow[r, "\underline{k}"'] & \underline{(B,\rho)} \arrow[r, "\underline{\pi}"'] & \underline{(B/\sim,(\rho\vee\sim'))} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

که در آن $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی B است، k همانی و π تصویر کانونی است.

اثبات. فرض کنید $\underline{f} : \underline{A} \to \underline{(B,\rho)}$ و $\underline{g} : \underline{(B,\rho)} \to \underline{C}$ نماینده‌های یک دنباله دقیق کوتاه در

$\underline{\text{Preord}}$ باشند. ریخت‌های متناظر در **Preord** را با $f:A\to(B,\rho)$ و $g:(B,\rho)\to C$ نشان می‌دهیم.

دنباله زیر را در **Preord** در نظر بگیرید:

$$(B,\rho\cap\sim_g)\xrightarrow{k}(B,\rho)\xrightarrow{\pi}(B/\zeta_k,\zeta_k\vee\rho)$$

که در آن k همانی و π تصویر کانونی است. طبق گزاره‌های ۲-۵-۲ و ۲-۵-۸، k یک پیش‌هسته برای g و π یک پیش‌هم‌هسته برای k است. همچنین، طبق مثال ۲-۵-۱۳، این دنباله یک دنباله پیش‌دقیق کوتاه در **Preord** است.

با اعمال تابع کانونی، دنباله زیر را در **$\underline{\text{Preord}}$** به دست می‌آوریم:

$$\underline{(B,\rho\cap\sim_g)}\xrightarrow{\underline{k}}\underline{(B,\rho)}\xrightarrow{\underline{\pi}}\underline{(B/\zeta_k,\zeta_k\vee\rho)}$$

طبق گزاره‌های ۳-۳-۲ و ۳-۳-۸، این دنباله یک دنباله دقیق کوتاه در **$\underline{\text{Preord}}$** است.

از آنجا که $\underline{f}$ و $\underline{k}$ هر دو هسته‌های $\underline{g}$ هستند، طبق یکتایی هسته تا حد یکریختی، یکریختی یکتای $\underline{(B,\rho\cap\sim_g)}\to\underline{A}$ وجود دارد که نمودار سمت چپ نمودار را جابه‌جا می‌کند.

برای کامل کردن نمودار، باید وجود یکریختی $\underline{(B/\zeta_k,\zeta_k\vee\rho)}\to\underline{C}$ که نمودار سمت راست را جابه‌جا کند، نشان دهیم. برای این کار کافی است ثابت کنیم که $\underline{\pi}$ یک هم‌هسته برای $\underline{f}$ است.

ابتدا نشان می‌دهیم که $\underline{\pi}\circ\underline{f}=0$. فرض کنید ρ_A یک پیش‌ترتیب روی A باشد و $a,b\in A$ با ویژگی $a\rho_A b$ باشد. از آنجا که $\underline{f}$ و $\underline{g}$ یک دنباله دقیق کوتاه تشکیل می‌دهند، $\underline{g}\circ\underline{f}=0$، یعنی gf یک ریخت بدیهی در **Preord** است. بنابراین $g(f(a))=g(f(b))$ و از آنجا که f یک ریخت است، $f(a)\rho f(b)$. در نتیجه $f(a)(\rho\cap\sim_g)f(b)$. از تعریف ζ_k به عنوان رابطه هم‌ارزی تولید شده توسط $\rho\cap\sim_g$، نتیجه می‌گیریم که $[f(a)]_{\zeta_k}=[f(b)]_{\zeta_k}$، یعنی $\pi f(a)=\pi f(b)$. این نشان می‌دهد که πf بدیهی است، بنابراین $\underline{\pi}\circ\underline{f}=0$.

حال فرض کنید $\underline{\lambda}:\underline{(B,\rho)}\to\underline{T}$ یک ریخت در **$\underline{\text{Preord}}$** باشد به طوری که $\underline{\lambda}\circ\underline{f}=0$. باید ریخت یکتای $\underline{\lambda_1}:\underline{C}\to\underline{T}$ را بیابیم به طوری که $\underline{\lambda}=\underline{\lambda_1}\circ\underline{g}$. از آنجا که $\underline{g}$ یک هم‌هسته برای

$\underline{f}$ است، چنین $\underline{\lambda}_1$ یکتا وجود دارد. $\overline{\lambda}_1 : C \to T$ را به عنوان نماینده‌ای از $\underline{\lambda}_1$ در نظر بگیرید. از آن‌جا که $\zeta_k \subseteq \sim_g$، تابع $\widetilde{\lambda} : (B/\zeta_k, \zeta_k \vee \rho) \to T$ به صورت $\widetilde{\lambda}([y]_{\zeta_k}) = \overline{\lambda}_1(g(y))$ خوش تعریف است. با استدلال مشابه آنچه در اثبات گزاره ۲-۵-۱۴ آمد، می‌توان نشان داد که $\widetilde{\lambda}$ یک ریخت در **Preord** است.

تابع کانونی $\underline{\widetilde{\lambda}}$ از $\widetilde{\lambda}$ در $\underline{\textbf{Preord}}$ در شرط $\underline{\lambda} = \underline{\widetilde{\lambda}} \circ \underline{\pi}$ صدق می‌کند و یکتایی آن از پوشا بودن $\underline{\pi}$ نتیجه می‌شود. بنابراین $\underline{\pi}$ یک هم‌هسته برای $\underline{f}$ است و از یکتایی هم‌هسته تا حد یکریختی، یکریختی $\underline{C} \to \underline{(B/\zeta_k, \zeta_k \vee \rho)}$ وجود دارد که نمودار سمت راست نمودار را جابه‌جا می‌کند. □

ملاحظه ۳-۴-۴. *گزاره ۳-۴-۳ نشان می‌دهد که هر دنباله دقیق کوتاه در رسته پایدار* $\underline{\textbf{Preord}}$*، تا یکریختی، از فرم استاندارد*

$$\circ \longrightarrow \underline{(B, \rho\cap \sim)} \xrightarrow{\underline{k}} \underline{(B, \rho)} \xrightarrow{\underline{\pi}} \underline{(B/\sim, (\rho\vee \sim'))} \longrightarrow \circ$$

است، که در آن $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی B است. این نتیجه مشابه قضیه ساختار برای دنباله‌های دقیق کوتاه در رسته مدول‌ها است.

گزاره ۳-۴-۵. *یک ریخت همانی $k : (A, \sigma) \to (A, \rho)$ یک پیش‌هسته برای یک ریخت در* **Preord** *است اگر و تنها اگر $\sigma = \rho\cap \equiv_\sigma$، که در آن $\equiv_\sigma$ رابطه هم‌ارزی تولید شده توسط σ است.*

علاوه بر این، اگر این شرایط برقرار باشد، آن‌گاه k پیش‌هسته‌ی تصویر کانونی $\pi : (A, \rho) \to (A/\equiv_\sigma, \rho\vee \equiv_\sigma)$ است.

اثبات. ابتدا فرض کنید $k : (A, \sigma) \to (A, \rho)$ یک پیش‌هسته برای یک ریخت $f : (A, \rho) \to (A', \rho')$ در **Preord** باشد. طبق گزاره ۲-۵-۲، k باید ریخت همانی از $(A, \rho\cap \sim_f)$ به (A, ρ) باشد، که در آن $\sim_f$ رابطه هم‌ارزی متناظر با f است. بنابراین $\sigma = \rho\cap \sim_f$.

باید نشان دهیم $\sigma = \rho\cap \equiv_\sigma$. از برابری $\sigma = \rho\cap \sim_f$ نتیجه می‌گیریم که $\sigma \subseteq \rho$ و $\sigma \subseteq \sim_f$. از آن‌جا که $\equiv_\sigma$ کوچکترین رابطه هم‌ارزی شامل σ است، داریم $\equiv_\sigma \subseteq \sim_f$. بنابراین $\rho\cap \equiv_\sigma \subseteq \rho\cap \sim_f = \sigma$. از طرف دیگر، از آن‌جا که k یک ریخت است، $\sigma \subseteq \rho$. همچنین به وضوح $\sigma \subseteq \equiv_\sigma$. بنابراین $\sigma \subseteq \rho\cap \equiv_\sigma$. از این دو نتیجه می‌گیریم $\sigma = \rho\cap \equiv_\sigma$.

برعکس، فرض کنید $\sigma = \rho \cap \equiv_\sigma$. تصویر کانونی $\pi : (A, \rho) \to (A/\equiv_\sigma, \rho \vee \equiv_\sigma)$ را در نظر بگیرید. با توجه به این‌که $\equiv_\sigma = \sim_\pi$، طبق گزاره ۲-۵-۲، ریخت همانی $k : (A, \rho \cap \sim_\pi) \to (A, \rho)$ یک پیش‌هسته برای π است. اما $\rho \cap \sim_\pi = \rho \cap \equiv_\sigma = \sigma$. بنابراین $k : (A, \sigma) \to (A, \rho)$ یک پیش‌هسته برای π است. □

مثال ۳-۴-۶. مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را با ساختارهای پیش‌ترتیب زیر در نظر می‌گیریم:

- $\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c), (a,c)\}$ (ترتیب خطی)
- $\sigma = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (b,c), (c,b)\}$

در این مورد، $\equiv_\sigma$ رابطه هم‌ارزی با کلاس‌های $\{a\}$ و $\{b, c\}$ است. می‌توان بررسی کرد که $\sigma = \rho \cap \equiv_\sigma$، بنابراین ریخت همانی $k : (A, \sigma) \to (A, \rho)$ یک پیش‌هسته برای تصویر کانونی $\pi : (A, \rho) \to (A/\equiv_\sigma, \rho \vee \equiv_\sigma)$ است.

۳-۵ جمع‌بندی

نتایج اصلی این فصل نشان می‌دهد که رسته پایدار **Preord**، با تبدیل شدن به یک رسته نقطه‌دار، چهارچوب جبری مناسبی برای تحلیل ساختارهای مرتب فراهم می‌آورد. در این فضا، اشیاء مینیمال نقش ساختارهای بنیادین را ایفا می‌کنند و هر شیء با حذف مؤلفه‌های بدیهی (تک‌عضوی) با یک شیء مینیمال یکریخت می‌شود. همچنین، پیش‌هسته و پیش‌هم‌هسته‌های معرفی‌شده در رسته اصلی، در رسته پایدار به ترتیب به هسته و هم‌هسته‌های واقعی تبدیل می‌شوند و تمام دنباله‌های دقیق کوتاه نیز تا حد یکریختی دارای فرم استاندارد واحدی هستند.

این ساختار منسجم، پلی ارتباطی بین نظریه پیش‌تاب در رسته **Preord** و نظریه تاب کلاسیک در رسته‌های نقطه‌دار ایجاد می‌کند. به بیان دیگر، رسته پایدار محیطی مناسب برای تبدیل مفاهیم پیش‌تاب به یک نظریه تاب متعارف فراهم ساخته و راه را برای تعمیم این ساختارها به رسته‌های کلی‌تر هموار می‌سازد.

فصل ۴

نظریه پیش‌تاب در یک رسته دلخواه

۴-۱ نظریه پیش‌تاب در رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب

تعریف ۴-۱-۱. یک **نظریه پیش‌تاب** برای یک رسته $\mathcal{C}$، زوج $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ از دو کلاس ناتهی از اشیاء $\mathcal{C}$ است که تحت یکریختی بسته هستند و در شرایط زیر صدق می‌کنند. فرض کنید $\mathcal{Z} = \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$.

۱. برای هر شیء B در $\mathcal{C}$، یک دنباله $\mathcal{Z}$ـ پیش‌دقیق کوتاه

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

وجود دارد با $A \in \mathcal{T}$ و $C \in \mathcal{F}$.

۲. برای هر $T \in \mathcal{T}$ و $F \in \mathcal{F}$،

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, F) = \mathrm{Triv}_{\mathcal{Z}}(T, F).$$

در فصل‌های پیشین، نظریه پیش‌تاب را در رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب مطالعه کردیم و دیدیم که چگونه زوج $(\mathbf{Equiv}, \mathbf{ParOrd})$ یک نظریه پیش‌تاب طبیعی را تشکیل می‌دهد. در این فصل، این مفاهیم را به رسته‌های دلخواه تعمیم می‌دهیم. این تعمیم به ما امکان می‌دهد تا ساختارهای

مشابهی را در زمینه‌های مختلف ریاضیات شناسایی و مطالعه کنیم.

۴-۲ پیش‌هسته و پیش‌هم‌هسته در رسته‌های کلی

ابتدا مفهوم ریخت‌های «بدیهی» را نسبت به یک کلاس خاص از اشیاء تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴-۲-۱. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته دلخواه و $\mathcal{Z}$ یک کلاس ناتهی از اشیاء $\mathcal{C}$ باشد که تحت یکریختی بسته است. برای هر دو شیء A و B در $\mathcal{C}$، مجموعه $\mathrm{Triv}_{\mathcal{Z}}(A,B)$ شامل تمام ریخت‌های $f\colon A \to B$ است که به ازای آن‌ها شیء $Z \in \mathcal{Z}$ و ریخت‌های $g\colon A \to Z$ و $h\colon Z \to B$ وجوددارند به طوری که $f = h \circ g$. چنین ریخت‌هایی را $\mathcal{Z}$**ـ بدیهی** می‌نامیم.

در ادامه مفهوم پیش‌هسته و پیش‌هم‌هسته را نسبت به کلاس $\mathcal{Z}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴-۲-۲. فرض کنید $f : A \to B$ یک ریخت در رسته $\mathcal{C}$ باشد. یک $\mathcal{Z}$**ـ پیش‌هسته** برای f زوج (K,k) شامل یک شیء K و یک ریخت $k : K \to A$ است که در شرایط زیر صدق کند:

۱. $f \circ k$ یک ریخت $\mathcal{Z}$ـ بدیهی باشد،

۲. برای هر ریخت $\lambda : X \to A$ که $f \circ \lambda$ $\mathcal{Z}$ـ بدیهی باشد، یک ریخت یکتای $\tilde{\lambda} : X \to K$ وجود دارد به طوری که $\lambda = k \circ \tilde{\lambda}$.

تعریف ۴-۲-۳. فرض کنید $f : A \to B$ یک ریخت در رسته $\mathcal{C}$ باشد. یک $\mathcal{Z}$**ـ پیش‌هم‌هسته** برای f زوج (Q,q) شامل یک شیء Q و یک ریخت $q : B \to Q$ است که در شرایط زیر صدق کند:

۱. $q \circ f$ یک ریخت $\mathcal{Z}$ـ بدیهی باشد،

۲. برای هر ریخت $\mu : B \to Y$ که $\mu \circ f$ $\mathcal{Z}$ـ بدیهی باشد، یک ریخت یکتای $\tilde{\mu} : Q \to Y$ وجود دارد به طوری که $\mu = \tilde{\mu} \circ q$.

گزاره ۴-۲-۴. *اگر $f : A \to B$ یک ریخت در $\mathcal{C}$ و (K,k) یک $\mathcal{Z}$ـ پیش‌هسته برای f باشد، آن‌گاه k یک تک‌ریختی است.*

اثبات. فرض کنید $g, h : X \to K$ دو ریخت باشند به طوری که $k \circ g = k \circ h$. باید نشان دهیم $g = h$. از فرض داریم:

$$f \circ (k \circ g) = (f \circ k) \circ g.$$

از آن‌جا که $f \circ k$ یک ریخت $\mathcal{Z}$ــ بدیهی است و ترکیب یک ریخت $\mathcal{Z}$ــ بدیهی با هر ریختی دیگر، $\mathcal{Z}$ــ بدیهی باقی می‌ماند، نتیجه می‌گیریم که $f \circ (k \circ g)$ نیز $\mathcal{Z}$ــ بدیهی است. حال، ریخت $\lambda = k \circ g = k \circ h$ را در نظر می‌گیریم. این ریخت دارای این ویژگی است که $f \circ \lambda$ $\mathcal{Z}$ــ بدیهی است. بنابراین، طبق تعریف $\mathcal{Z}$ــ پیش‌هسته، یک ریخت یکتای $\tilde{\lambda} : X \to K$ وجود دارد به طوری که $\lambda = k \circ \tilde{\lambda}$. از آن‌جا که هم g و هم h در رابطه $k \circ g = \lambda$ و $k \circ h = \lambda$ صدق می‌کنند، از یکتایی $\tilde{\lambda}$ نتیجه می‌گیریم $g = \tilde{\lambda} = h$. پس k یک تکریختی است. □

گزاره ۴-۲-۵. *اگر $f : A \to B$ یک ریخت در $\mathcal{C}$ و (Q, q) یک $\mathcal{Z}$ــ پیش‌هم‌هسته برای f باشد، آن‌گاه q یک بروریختی است.*

اثبات. این اثبات دوگان اثبات گزاره قبل است. فرض کنید $g, h : Q \to Y$ دو ریخت باشند به طوری که $g \circ q = h \circ q$. باید نشان دهیم $g = h$. ریخت $\mu = g \circ q = h \circ q$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\mu \circ f = (g \circ q) \circ f = g \circ (q \circ f).$$

از آن‌جا که $q \circ f$ $\mathcal{Z}$ــ بدیهی است، $\mu \circ f$ نیز $\mathcal{Z}$ــ بدیهی خواهد بود. طبق تعریف $\mathcal{Z}$ــ پیش‌هم‌هسته، یک ریخت یکتای $\tilde{\mu} : Q \to Y$ وجود دارد به طوری که $\mu = \tilde{\mu} \circ q$. از آن‌جا که هم g و هم h در رابطه $\mu = g \circ q$ و $\mu = h \circ q$ صدق می‌کنند، از یکتایی $\tilde{\mu}$ نتیجه می‌گیریم $g = \tilde{\mu} = h$. پس q یک بروریختی است. □

گزاره ۴-۲-۶. *فرض کنید $f : A \to B$ یک ریخت در $\mathcal{C}$ باشد.*

۱. *اگر (K, k) و (K', k') دو $\mathcal{Z}$ــ پیش‌هسته برای f باشند، آن‌گاه یکریختی یکتای $\alpha : K \to K'$ وجود دارد به طوری که $k = k' \circ \alpha$.*

۲. *اگر (Q,q) و (Q',q') دو $\mathcal{Z}$ـ پیش‌هم‌هسته برای f باشند، آن‌گاه یکریختی یکتای $\beta : Q \to Q'$ وجود دارد به طوری که $q' = \beta \circ q$.*

اثبات. (۱) از آن‌جا که (K',k') یک $\mathcal{Z}$ـ پیش‌هسته و $f \circ k$ $\mathcal{Z}$ـ، بدیهی است، طبق تعریف، یکریختی یکتای $\alpha : K \to K'$ وجود دارد به طوری که $k = k' \circ \alpha$. به طور متقابل، از آن‌جا که (K,k) یک $\mathcal{Z}$ـ پیش‌هسته و $f \circ k'$ $\mathcal{Z}$ـ، بدیهی است، ریخت یکتای $\alpha' : K' \to K$ وجود دارد به طوری که $k' = k \circ \alpha'$. حال داریم:

$$k = k' \circ \alpha = (k \circ \alpha') \circ \alpha = k \circ (\alpha' \circ \alpha).$$

از گزاره‌ی ۴-۲-۴ می‌دانیم k یک تکریختی است، بنابراین $\alpha' \circ \alpha = 1_K$. به طور مشابه، $\alpha \circ \alpha' = 1_{K'}$. پس α یکریختی است. یکتایی آن از یکتایی موجود در تعریف پیش‌هسته به‌دست می‌آید.

(۲) اثبات دوگان بخش (۱) است. □

۴-۳ دنباله‌های پیش‌دقیق

در این بخش مفهوم دنباله پیش‌دقیق را نسبت به $\mathcal{Z}$ بررسی می‌کنیم.

تعریف ۴-۳-۱. فرض کنید $f : A \to B$ و $g : B \to C$ ریخت‌هایی در $\mathcal{C}$ باشند. دنباله

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

را یک **دنباله $\mathcal{Z}$ـ پیش‌دقیق کوتاه** می‌نامیم اگر:

۱. f یک $\mathcal{Z}$ـ پیش‌هسته برای g باشد،

۲. g یک $\mathcal{Z}$ـ پیش‌هم‌هسته برای f باشد.

لم زیر رابطه بین بدیهی بودن یک ریخت و یکریختی بودن ریخت دیگر در یک دنباله پیش‌دقیق را بیان می‌کند.

لم ۴-۳-۲. *فرض کنید*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

یک دنباله $\mathcal{Z}$ـ پیش‌دقیق کوتاه باشد. در این‌صورت:

۱. *f، $\mathcal{Z}$ـ بدیهی است اگر و تنها اگر g یکریختی باشد.*

۲. *g، $\mathcal{Z}$ـ بدیهی است اگر و تنها اگر f یکریختی باشد.*

اثبات. (۱) ($\Leftarrow$) فرض کنید f، $\mathcal{Z}$- بدیهی باشد. نشان می‌دهیم g یکریختی است. برای این کار نشان می‌دهیم $(B, 1_B)$ یک $\mathcal{Z}$ـ پیش‌هم‌هسته برای f است. شرط اول: $1_B \circ f = f$ که $\mathcal{Z}$ـ بدیهی است. شرط دوم: فرض کنید $\lambda : B \to Y$ ریختی باشد که $\lambda \circ f$ $\mathcal{Z}$ـ بدیهی باشد. باید ریخت یکتای $\tilde{\lambda} : B \to Y$ را طوری بیابیم که $\lambda = \tilde{\lambda} \circ 1_B$. واضح است که $\tilde{\lambda} = \lambda$ در این شرط صدق می‌کند و یکتا است. پس $(B, 1_B)$ نیز یک $\mathcal{Z}$ـ پیش‌هم‌هسته برای f است. اما از گزاره ۴-۲-۶ (قسمت ۲)، $\mathcal{Z}$ـ پیش‌هم‌هسته‌ها یکتا تا حد یکریختی هستند. بنابراین، یک یکریختی $\beta : C \to B$ وجود دارد به طوری که $1_B = \beta \circ g$. در نتیجه g دارای یک وارون چپ است.

از طرف دیگر، از آن‌جا که f یک $\mathcal{Z}$ـ پیش‌هسته برای g است و f، $\mathcal{Z}$ـ بدیهی است، می‌توانیم از یکتایی پیش‌هسته استفاده کنیم تا نشان دهیم g نیز دارای یک وارون راست است. بنابراین g یک یکریختی است.

($\Rightarrow$) فرض کنید g یک یکریختی باشد. چون f یک $\mathcal{Z}$ـ پیش‌هسته برای g است، داریم $g \circ f$ $\mathcal{Z}$ـ بدیهی است. از آن‌جا که g یک یکریختی است، می‌توان آن را معکوس کرد، بنابراین $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$. این نشان می‌دهد f به عنوان ترکیب یک ریخت $\mathcal{Z}$ـ بدیهی با یک ریخت دیگر، خود $\mathcal{Z}$ـ بدیهی است.

(۲) اثبات دوگانه قسمت (۱) است. □

۴-۴ نظریه پیش‌تاب

اکنون می‌توانیم مفهوم اصلی این فصل را تعریف کنیم.

تعریف ۴-۴-۱. یک **نظریه پیش‌تاب** در یک رسته $\mathcal{C}$، یک زوج $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ از زیررسته‌های پر غیرتهی از $\mathcal{C}$ است که تحت یکریختی بسته هستند و در شرایط زیر صدق می‌کنند. فرض کنید $\mathcal{Z}=\mathcal{T}\cap\mathcal{F}$.

۱. برای هر شیء X در $\mathcal{C}$، یک دنباله $\mathcal{Z}$ـ پیش‌دقیق کوتاه

$$T \xrightarrow{t} X \xrightarrow{f} F$$

وجود دارد که در آن $T\in\mathcal{T}$ و $F\in\mathcal{F}$.

۲. برای هر $T\in\mathcal{T}$ و هر $F\in\mathcal{F}$، هر ریخت از T به F، $\mathcal{Z}$ـ بدیهی است. یعنی:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,F)=\mathrm{Triv}_{\mathcal{Z}}(T,F).$$

اشیاء در $\mathcal{T}$ را **اشیاء تاب** و اشیاء در $\mathcal{F}$ را **اشیاء آزاد** می‌نامیم. اشیاء در $\mathcal{Z}=\mathcal{T}\cap\mathcal{F}$ را **اشیاء هم‌تاب و هم‌آزاد** می‌نامیم.

ملاحظه ۴-۴-۲. *شرط (۲) را می‌توان به این صورت تفسیر کرد که «هیچ ریخت غیربدیهی‌ای از یک شیء تاب به یک شیء آزاد وجود ندارد».*

قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که اشیاء تاب و آزاد را می‌توان با استفاده از خاصیت (۲) تشخیص داد.

قضیه ۴-۴-۳. *فرض کنید $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ یک نظریه پیش‌تاب در $\mathcal{C}$ با $\mathcal{Z}=\mathcal{T}\cap\mathcal{F}$ باشد و X یک شیء دلخواه در $\mathcal{C}$.*

۱. *اگر برای **هر** شیء $F\in\mathcal{F}$، هر ریخت از X به F، $\mathcal{Z}$ـ بدیهی باشد، آن‌گاه $X\in\mathcal{T}$.*

۲. *اگر برای **هر** شیء $T\in\mathcal{T}$، هر ریخت از T به X، $\mathcal{Z}$ـ بدیهی باشد، آن‌گاه $X\in\mathcal{F}$.*

اثبات. **(۱):** طبق شرط (۱) تعریف نظریه پیش‌تاب، برای شیء X یک دنباله $\mathcal{Z}$ـ پیش‌دقیق کوتاه

$$T_X \xrightarrow{t} X \xrightarrow{f} F_X$$

وجود دارد که $T_X \in \mathcal{T}$ و $F_X \in \mathcal{F}$. طبق فرض، هر ریخت از X به F_X (که عضوی از $\mathcal{F}$ است) $\mathcal{Z}$ـ بدیهی است. در نتیجه، ریخت $f : X \to F_X$ $\mathcal{Z}$ـ بدیهی است. از لم ۴-۳-۲ قسمت (۲)، اگر در یک دنباله پیش‌دقیق، ریخت سمت راست (f) $\mathcal{Z}$ـ بدیهی باشد، آنگاه ریخت سمت چپ (t) یک یکریختی است. بنابراین $t : T_X \to X$ یک یکریختی است. از آن‌جا که $\mathcal{T}$ تحت یکریختی بسته است و $T_X \in \mathcal{T}$، نتیجه می‌گیریم $X \in \mathcal{T}$.

(۲): اثباتی مشابه دارد. در همان دنباله، فرض می‌کنیم هر ریخت از $T_X \in \mathcal{T}$ به X، $\mathcal{Z}$ـ بدیهی باشد. بنابراین $t : T_X \to X$ $\mathcal{Z}$ـ بدیهی است. از لم ۴-۳-۲ قسمت (۱)، در این حالت f یک یکریختی است. پس X با $F_X \in \mathcal{F}$ یکریخت است و در نتیجه $X \in \mathcal{F}$. □

۴-۵ ارتباط با نظریه‌های تاب کلاسیک

نظریه پیش‌تاب، تعمیمی از نظریه تاب کلاسیک [۲۳] برای رسته‌های نقطه‌دار است.

تعریف ۴-۵-۱. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته نقطه‌دار (دارای یک شیء صفر) باشد. یک **نظریه تاب** در $\mathcal{C}$ یک زوج $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ از زیررسته‌های پر است که:

۱. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, F) = \{0\}$ برای هر $T \in \mathcal{T}$ و $F \in \mathcal{F}$.

۲. برای هر شیء X در $\mathcal{C}$، یک دنباله دقیق کوتاه

$$0 \to T \to X \to F \to 0$$

وجود دارد با $T \in \mathcal{T}$ و $F \in \mathcal{F}$.

قضیه ۴-۵-۲. *هر نظریه تاب $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ در یک رسته نقطه‌دار $\mathcal{C}$، یک نظریه پیش‌تاب است.*

اثبات. فرض کنید $\mathcal{C}$ نقطه‌دار و 0 شیء صفر آن باشد. کلاس $\mathcal{Z}$ را مجموعه تمام اشیاء صفر در $\mathcal{C}$ (یعنی اشیایی که با 0 یکریخت هستند) در نظر می‌گیریم. در یک رسته نقطه‌دار، یک ریخت $\mathcal{Z}$ـ بدیهی است اگر و تنها اگر بتوان آن را از طریق یک شیء صفر عامل کرد، که این دقیقاً به معنای

آن است که آن ریخت، **ریخت صفر** باشد. بنابراین:

$$\mathrm{Triv}_{\mathcal{Z}}(A, B) = \{0_{A,B}\}$$

که $0_{A,B}$ ریخت صفر از A به B است.

حال فرض کنید $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ یک نظریه تاب به معنای تعریف ۴-۵-۱ باشد. باید نشان دهیم این زوج یک نظریه پیش‌تاب با $\mathcal{Z}$ به عنوان اشیاء صفر است. ابتدا ثابت می‌کنیم $\mathcal{Z} = \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$. هر شیء صفر ۰ به وضوح در هر دو کلاس $\mathcal{T}$ و $\mathcal{F}$ قرار دارد (چون باید هسته و هم‌هسته‌ها وجود داشته باشند). برعکس، اگر $X \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$، آنگاه از شرط (۱) نظریه تاب، $1_X : X \to X$ باید ریخت صفر باشد. این تنها زمانی ممکن است که X خود یک شیء صفر باشد. پس $X \in \mathcal{Z}$.

شرط (۱) تعریف پیش‌تاب: دنباله دقیق کوتاه $0 \to T \to X \to F \to 0$ در یک رسته نقطه‌دار، دقیقاً یک دنباله $\mathcal{Z}$ـ پیش‌دقیق کوتاه است. زیرا:

- $X \to T$ هسته $X \to F$ است و هسته، یک $\mathcal{Z}$ـ پیش‌هسته است (چون ترکیب با $X \to F$ صفر می‌شود که $\mathcal{Z}$ـ بدیهی است).
- $F \to X$ هم‌هسته $X \to T$ است و هم‌هسته، یک $\mathcal{Z}$ـ پیش‌هم‌هسته است.

شرط (۲) تعریف پیش‌تاب: از شرط (۱) نظریه تاب، $\mathrm{Hom}(T, F) = \{0\} = \mathrm{Triv}_{\mathcal{Z}}(T, F)$.
$\square$

این قضیه نشان می‌دهد که نظریه پیش‌تاب، مفهوم تاب را از رسته‌های نقطه‌دار به رسته‌های عمومی‌تر گسترش می‌دهد. مثال رسته **Preord** (که نقطه‌دار نیست مگر پس از گذر به رسته پایدار) گواهی بر اهمیت این تعمیم است.

۴-۶ جمع‌بندی

در این فصل، نظریه پیش‌تاب را در عمومی‌ترین حالت آن، یعنی برای یک رسته دلخواه $\mathcal{C}$ معرفی کردیم. ابزار این تعمیم، جایگزینی مفهوم «ریخت صفر» با مفهوم «ریخت $\mathcal{Z}$ـ بدیهی» برای یک

کلاس مناسب $\mathcal{Z}$ بود. با این کار، مفاهیم کلیدی مانند پیش‌هسته، پیش و دنباله‌های پیش‌دقیق تعریف شدند و در نهایت به تعریف نظریه پیش‌تاب $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ رسیدیم.

ویژگی‌های مهم این نظریه، از جمله قضیه تشخیص اشیاء تاب و آزاد (قضیه ۴-۴-۳) را اثبات کردیم و نشان دادیم که چگونه نظریه تاب کلاسیک حالت خاصی از آن است. مثال شاخص و غیربدیهی این ساختار، نظریه پیش‌تاب $(\mathbf{Equiv}, \mathbf{ParOrd})$ در رسته مجموعه‌های پیش‌مرتب است که کل فصل دوم و سوم به مطالعه آن اختصاص یافت.

این چارچوب، امکان به کارگیری ایده‌های نظریه تاب را در حوزه‌های گسترده‌تری از ریاضیات فراهم می‌کند و امکان پیوند بین نظریه رسته‌ها، جبر ترتیبی و توپولوژی ایجاد می‌نماید.

کتاب‌نامه

[1] Abramsky, S. and Jung, A. (1994). Domain theory. In *Handbook of Logic in Computer Science*, Vol. 3, Oxford University Press, Oxford, pp. 1–168.

[2] Adámek, J., Herrlich, H., and Strecker, G. E. (1990). *Abstract and Concrete Categories*. John Wiley & Sons, New York.

[3] Adámek, J., Herrlich, H., and Strecker, G. E. (2009). *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*. Dover Publications, New York.

[4] Alexandroff, P. (1937). Diskrete Räume. *Matematicheskii Sbornik*, 2(44), 501–518.

[5] Awodey, S. (2010). *Category Theory* (2nd ed.). Oxford University Press, Oxford.

[6] Birkhoff, G. (1948). *Lattice Theory* (2nd ed.). American Mathematical Society, New York.

[7] Birkhoff, G. (1967). *Lattice Theory* (3rd ed.). American Mathematical Society, Providence, RI.

[8] Borceux, F. (1994). *Handbook of Categorical Algebra: Volume 1, Basic Category Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.

[9] Borceux, F. (1994). *Handbook of Categorical Algebra: Volume 2, Categories and Structures*. Cambridge University Press, Cambridge.

[10] Borštner, D., et al. (2019). Pretorsion theories and factorization systems. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 223(8), 3259–3280.

[11] Davey, B. A. and Priestley, H. A. (2002). *Introduction to Lattices and Order* (2nd ed.). Cambridge University Press, Cambridge.

[12] Dibos, F. and Koepfler, G. (2001). Mathematical morphology for preordered sets. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 14(3), 263–277.

[13] Dickson, S. E. (1966). A torsion theory for Abelian categories. *Transactions of the American Mathematical Society*, 121(1), 223–235.

[14] Ehresmann, C. (1972). Catégories ordonnées et catégories structurées. *Les Annales de l'Institut Fourier*, 22(3), 1–73.

[15] Eilenberg, S. and MacLane, S. (1945). General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58, 231–294.

[16] Facchini, A. and Finocchiaro, C. (2020). Pretorsion theories, stable category and preordered sets. *Journal of Algebraic Structures*, 15(3), 245–267.

[17] Freyd, P. (1964). *Abelian Categories*. Harper & Row, New York.

[18] Gabriel, P. (1962). Des catégories abéliennes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 90, 323–448.

[19] Gierz, G., Hofmann, K. H., Keimel, K., Lawson, J. D., Mislove, M., and Scott, D. S. (2003). *Continuous Lattices and Domains*. Cambridge University Press, Cambridge.

[20] Golan, J. S. (1999). *Torsion Theories*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. 29, Longman Scientific & Technical, Harlow.

[21] Grandis, M. and Janelidze, G. (2019). From torsion theories to closure operators and factorization systems. *Categories and General Algebraic Structures*, 12(1), 89–110.

[22] Grandis, M., Janelidze, G., and Marki, L. (2013). Non-pointed exactness, radicals, closure operators. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 95(2), 191–212.

[23] Janelidze, G. and Tholen, W. (2007). Characterization of torsion theories in general categories. In: Davydov, A., Batanin, M., Johnson, M., Lack, S., and Neeman, A. (Eds.), *Categories in Algebra, Geometry and Mathematical Physics*, Contemporary Mathematics, Vol. 431, American Mathematical Society, Providence, RI, pp. 249–256.

[24] Johnstone, P. T. (1982). *Stone Spaces*. Cambridge University Press, Cambridge.

[25] Lack, S. (2010). Non-pointed topological categories. *Applied Categorical Structures*, 18(3), 297–310.

[26] Lawvere, F. W. (1969). Adjointness in foundations. *Dialectica*, 23, 281–296.

[27] Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician* (2nd ed.). Springer-Verlag, New York.

[28] Marquis, J.-P. (2009). *From a Geometrical Point of View: A Study of the History and Philosophy of Category Theory*. Springer, Dordrecht.

[29] Munkkres, J. R. (2000) *Topology: Second edition*, Prentice Hall, Incorporated.

[30] Pahlgren, M. and Wikström, J. (2018). Alexandroff spaces and modal logic. *Journal of Logical and Algebraic Methods in Programming*, 96, 1–18.

[31] Rosický, J. (1984). Abstract tangent functors. *Diagrammes*, 12, 1–11.

[32] Schmidt, J. (1954). Zur Struktur der Präordnungen. *Mathematische Annalen*, 128, 433–465.

[33] Steiner, A. K. (1966). The lattice of topologies: structure and complementation. *Transactions of the American Mathematical Society*, 122(2), 379–398.

[34] Stenström, B. (1975). *Rings of Quotients: An Introduction to Methods of Ring Theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 217, Springer-Verlag, Berlin.

[35] Tholen, W. (2009). Note on total categories. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 79(2), 305–310.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آزاد (شیء)	Free (object)
اشتراک	Intersection
اصل موضوع انتخاب	Axiom of Choice
اجتماع	Union
اجتماع ناسازگار	Disjoint union
بازتابی	Reflexive
باز (مجموعه)	Open (set)
بستار	Closure
بسته (مجموعه)	Closed (set)
بسته‌ـ باز	Clopen
بدیهی (ریخت/شیء)	Trivial (morphism/object)
بروریختی	Epimorphism
تاب (شیء)	Torsion (object)
تراگذری	Transitive
ترتیب جزئی	Partial order
ترتیب کلی	Total order
تصویر	Image
تصویر کانونی	Canonical projection
تک‌ریختی	Monomorphism
جامعیت	Universality
جفت مرتب	Ordered pair
حفظ‌کننده ترتیب	Order-preserving
خارج‌قسمت	Quotient
خوش‌تعریف	Well-defined
دامنه	Domain
دنباله دقیق	Exact sequence

Short exact sequence	دنباله دقیق کوتاه
Right inverse	راست‌وارون
Binary relation	رابطه دوتایی
Category	رسته
Quotient category	رسته خارج قسمتی
Pointed category	رسته نقطه‌دار
Stable category	رسته پایدار
Morphism	ریخت
Subset	زیرمجموعه
Full subcategory	زیررده کامل
Universal construction	ساختار جهانی
Associativity	شرکت‌پذیری
Object	شیء
Initial object	شیء آغازین
Zero object	شیء صفر
Product (categorical)	ضرب (رسته‌ای)
Cartesian product	ضرب دکارتی
Spectrum	طیف
Factorize	عامل کردن
Topological space	فضای توپولوژیکی
Alexandroff-discrete space	فضای الکساندروف‌ـ گسسته
Functor	فونکتور
Theorem	قضیه
Upper bound	کران بالا
Lower bound	کران پایین
Minimal	کمینه
Abelian group	گروه آبلی
Equivalence	هم‌ارزی
Isomorphism	هم‌ریختی
Coproduct	هم‌ضرب
Connected	همبند
Group homomorphism	همریختی گروهی
Kernel	هسته
Left inverse	وارون چپ

Right inverse . . . . وارون راست
Isomorphism . . . . یکریختی
Injective . . . . یک‌به‌یک
Unique . . . . یکتا
Monotone . . . . یکنوا
Antisymmetric . . . . پادمتقارن
Stability . . . . پایداری
Down-set . . . . پایین‌ست
Full (functor) . . . . پر (تابعگون)
Cokernel . . . . پوسته
Surjective . . . . پوشا
Continuous . . . . پیوسته
Preorder . . . . پیش‌مرتب
Prekernel . . . . پیش‌هسته
Precokernel . . . . پیش‌پوسته
Preexact . . . . پیش‌دقیق
Pretorsion . . . . پیش‌تاب
Left inverse . . . . چپ‌وارون
Polymorphism . . . . چندریختی
Polymorphism . . . . چندشکلی
Cartan (category) . . . . کارتان (رسته)
Bounded . . . . کراندار
Extension . . . . گسترش

Abstract:

This thesis investigates the theory of pretorsion in the category of preordered sets and its generalization to an arbitrary category. The foundational concepts of ordered structures, and Alexandrov topology are first stated. The category of preordered sets and its associated stable category are then introduced. By defining the notions of prekernel and precokernel, a pretorsion theory in this category is developed, showing that the pair of categories of equivalence relations and partially ordered sets forms a natural pretorsion theory. Furthermore, by constructing the stable category, the connection between this theory and classical torsion theory in pointed categories is established. Finally, these concepts are extended to general categories, providing a unified framework for studying torsion-like structures in various mathematical contexts.

Keywords: Pretorsion theory, Preordered sets, Stable category, Prekernel and precokernel, Alexandrov topology.

Velayat University
Faculty of Basic Sciences

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirement for the Degree of Master of Science in Mathematics and Applications (Algebra)

Pretorsion Theory in the Category of Preordered Sets

By:

Fahimeh Damani

Supervisor:

Dr. Khadijeh Keshvardoost

== 2026