



## دوگان دوم-دوتصویری جبرهای باناخ تانسوری تصویری و رابطه‌ی آنها با مفاهیم همانستگی مربوطه

ابراهیم تمیمی (۱)

(۱) گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه ولایت، ایرانشهر، ایران

دبیر مسئول: محمد اسماعیل سامعی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۴/۰۹

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۷/۰۶

چکیده: فرض کنیم  $A$  و  $B$  به ترتیب، جبرهای باناخ  $A^{**}$ -دوتصویر  $(\varphi - A^{**})$ -دوتصویر  $(\psi - B^{**})$  و  $B^{**}$ -دوتصویر باشند، که در آنها  $\varphi$  و  $\psi$  به ترتیب تابع‌های خطی ضربی ناصفر روی  $A$  و  $B$  می‌باشند. در این مقاله، ارتباط خواصی را که از جبرهای باناخ  $A$  و  $B$  به حاصل ضرب تانسوری تصویری  $A \hat{\otimes} B$  به ارث می‌رسند، را با مفاهیم همانستگی مربوطه مانند  $\varphi \otimes \psi$ -میانگین‌پذیری چپ (راست)  $A \hat{\otimes} B$  بررسی می‌کنیم. بالاخص، خواص موروثی  $(A \hat{\otimes} B)^{**}$ -دوتصویری و  $\varphi \otimes \psi - (A \hat{\otimes} B)^{**}$ -دوتصویری جبر باناخ  $A \hat{\otimes} B$  را بررسی کرده و مثال‌هایی در این راستا ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی:  $\varphi \otimes \psi - (A \hat{\otimes} B)^{**}$ -دوتصویر، جبرهای باناخ،  $\varphi \otimes \psi$ -میانگین‌پذیری چپ، همانی تقریبی کراندار، حاصل ضرب تانسوری تصویری

رده‌بندی ریاضی: 43A20; 46M10

## ۱ مقدمه و مفاهیم

مفهوم میانگین‌پذیری گروه‌های گسسته توسط ج. فون نویمان در سال ۱۹۲۹ ارائه گردید، که در آن، میانگین‌پذیری یک گروه گسسته بر پایه‌ی وجود یک اندازه‌ی احتمال جمعی پایای چپ استوار است [۲۰]. در ادامه م. م. دی این مفهوم را برای تمام گروه‌های فشرده موضعی ارائه کرد [۳]. سپس ب. ا. جانسون در سال ۱۹۷۲ این مفهوم را برای جبرهای باناخ گسترش داد و از آن پس به عنوان یک موضوع تحت بررسی جالب مورد اقبال ریاضی‌دانان قرار گرفت و کاربردهای فراوانی در زمینه‌های گوناگون مانند آنالیز همساز، نظریه عملگرها و نظریه ارگودیک پیدا کرد [۹]. در واقع، جبر باناخ  $A$ ، میانگین‌پذیر نامیده می‌شود اگر اولین گروه هاشخیلد  $A$  با ضرایب در هر  $A$ -دومدول باناخ دوگان  $X^*$  بدیهی باشد [۹]. در ادامه این مفهوم به عنوان یک ویژگی همانستگی پراهمیت برای جبرهای باناخ مورد توجه بسیاری از علاقه‌مندان به ریاضی قرار گرفت. بعدها تحقیقات زیادی در رابطه با خواص این مفهوم و ارتباط آن با بسیاری از مفاهیم دیگر همانستگی مورد بررسی قرار گرفت. در

سال ۲۰۰۶ قهرمانی و همکارانش مفهوم ضعیف تری تحت عنوان میانگین پذیری تقریبی را ارائه دادند و توانستند بسیاری از نتایج مربوط به میانگین پذیری را گسترش دهند [۵]. در سال ۲۰۰۸ کانپوت و همکارانش مفهوم  $\varphi$ -میانگین پذیری جبرهای باناخ را معرفی کردند [۱۰]. تعریف نام برده با الهام از تعریف میانگین پذیری چپ  $F$ -جبرها که قبلاً توسط لائو انجام شده بود، شکل گرفت [۱۱]، هرچند که، مفهوم  $\varphi$ -میانگین پذیری در [۱۰] و به طور مستقل در [۱۲] نیز معرفی شد.  $\chi$ -کان میانگین پذیری ضرب معین جبرهای باناخ و کان میانگین پذیری مدولی جبرهای نیم گروهی در [۱۸، ۴] و  $\chi \otimes \eta$ -کان میانگین پذیری قوی جبرهای باناخ دوگان خاص در [۱۹] بررسی شد، که در آنها  $\chi$  و  $\eta$  دو تابع خطی روی جبرهای باناخ هستند.

هلمسکی در دهه ۱۹۸۰ جبرهای باناخ دوتصویر را تعریف کرد که تا به اکنون به عنوان یکی از ابزارهای مهم در همانستگی جبرهای باناخ شناخته می شوند [۸]. در سراسر مقاله، فرض کنیم به ازای هر  $a, b \in \mathcal{A}$ ،  $\pi_{\mathcal{A}}: \widehat{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  با ضابطه  $\pi_{\mathcal{A}}(a \otimes b) = ab$  یک نگاشت ضربی باشد.

تعریف ۱.۱. جبر باناخ  $\mathcal{A}$ ، دوتصویر نامیده می شود هرگاه همریختی  $\mathcal{A}$ -دومدولی پیوسته  $\mathcal{A} \otimes \widehat{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$ ،  $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \widehat{\mathcal{A}}$  وجود داشته باشد به طوری که  $[\mathbf{8}] \pi_{\mathcal{A}} \circ \rho = id_{\mathcal{A}}$ .

پس از آن مفاهیم دیگری که قوی تر یا ضعیف تر از این مفهوم بودند نیز تعریف و مورد بررسی قرار گرفتند. مثلاً، ژانگ در سال ۱۹۹۹ جبرهای باناخ دوتصویر تقریبی را معرفی کرد [۲۱]. سهامی و پورعباس در سال ۱۴۰۱ با الهام از تعریف  $\varphi$ -میانگین پذیری، مفهوم جبرهای باناخ  $\varphi$ -دوتصویر را معرفی کردند و خواص آنها را مورد بررسی قرار دادند [۱۷]. در ادامه، تحقیقات زیادی روی این مفهوم برای جبرهایی مانند جبر گروهی، جبر اندازه، جبر نیم گروهی و جبرهای لیپشیتزی انجام پذیرفت [۱۴].

تعریف ۲.۱. فرض کنیم  $\mathcal{A}$  یک جبر باناخ و  $\varphi$  یک تابع خطی ضربی کران دار ناصفر روی  $\mathcal{A}$  باشد. در این صورت  $\mathcal{A}$ ،  $\varphi$ -دوتصویر نامیده می شود هرگاه همریختی  $\mathcal{A}$ -دومدولی پیوسته  $\mathcal{A} \otimes \widehat{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$ ،  $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \widehat{\mathcal{A}}$  موجود باشد به طوری که برای هر  $a \in \mathcal{A}$ ،  $\varphi \circ \pi_{\mathcal{A}} \circ \rho(a) = a$ ،  $\varphi(a)$  [۱۷].

نویسندگان مفهوم جبرهای باناخ  $\mathcal{A}^{**}$ -دوتصویر را معرفی کردند و رابطه ی آنها را با برخی از مفاهیم همانستگی مطالعه کردند [۱۴]. همچنین  $\mathcal{A}^{**}$ -دوتصویری برخی از جبرهای باناخ مانند جبرهای لیپشیتزی و جبرهای مثلثی بررسی شده است [۱۴]. به علاوه، دوگان جبرهای گروهی تحت یک توپولوژی محدب موضعی، مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است [۱]. در مجموع، جبرهای باناخ میانگین پذیر نقش عمده ای در مفهوم جبرهای دوتصویری ایفا می کنند.

فرض کنیم  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  به ترتیب، جبرهای باناخ  $\mathcal{A}^{**}$ -دوتصویر ( $\varphi$ - $\mathcal{A}^{**}$ -دوتصویر) و  $\mathcal{B}^{**}$ -دوتصویر ( $\psi$ - $\mathcal{B}^{**}$ -دوتصویر) باشند، که در آنها  $\varphi$  و  $\psi$  به ترتیب تابع های خطی ضربی ناصفر روی  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  هستند. در این مقاله، خواص موروثی را که از جبرهای باناخ  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  به جبر باناخ تانسوری تصویری  $\widehat{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{B}$  می رسند، بررسی می کنیم. همچنین، ارتباط آنها را با مفاهیم همانستگی مانند  $\varphi \otimes \psi$ -میانگین پذیری چپ (راست) مطالعه می کنیم. بالاخص، خواص موروثی  $(\widehat{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{B})^{**}$ -دوتصویری و  $\varphi \otimes \psi$ - $(\widehat{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{B})^{**}$ -دوتصویری جبر باناخ  $\widehat{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{B}$  را بررسی کرده و در این راستا، مثال هایی برای نتایج بدست آمده ارائه می دهیم.

## ۲ نتایج اصلی

فرض کنیم  $\mathcal{A}$  یک جبر باناخ و  $X$  یک  $\mathcal{A}$ -دومدول باناخ باشد. در این صورت فضای دوگان  $X^*$  یعنی  $X^*$  با اعمال مدولی زیر یک  $\mathcal{A}$ -دومدول باناخ است:

$$(a \cdot f)(x) = f(x \cdot a), \quad (f \cdot a)(x) = f(a \cdot x); \quad (a \in \mathcal{A}, x \in X, f \in X^*).$$

فرض کنیم  $\widehat{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{A}$  فضای حاصل ضرب تانسوری تصویری جبر باناخ  $\mathcal{A}$  با خودش باشد. در این صورت  $\widehat{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{A}$  با اعمال مدولی زیر یک  $\mathcal{A}$ -دومدول باناخ خواهد بود:

$$a \cdot (b \otimes c) = ab \otimes c, \quad (a \otimes b) \cdot c = a \otimes bc; \quad (a, b, c \in \mathcal{A}). \quad (1.2)$$

از اینرو  $(\widehat{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{A})^*$  با اعمال مدولی زیر نیز یک  $\mathcal{A}$ -دومدول باناخ است:

$$(a \cdot f)(b \otimes c) = f(b \otimes ca), \quad (f \cdot a)(b \otimes c) = f(ab \otimes c); \quad (a, b, c \in \mathcal{A}, f \in (\widehat{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{A})^*).$$

به طور مشابه می توان  $(\widehat{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{A})^{**}$  را به عنوان یک  $\mathcal{A}$ -دومدول باناخ در نظر گرفت. به یک تابع خطی ضربی ناصفر روی جبر باناخ  $\mathcal{A}$  یک مشخصه گفته می شود و مجموعه ی تمام مشخصه های روی  $\mathcal{A}$  را با نماد  $\Delta(\mathcal{A})$  نمایش می دهیم. در سرتاسر این مقاله،

$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{**} : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}$  نشاندهی طبیعی می‌باشد. آرنز در سال ۱۵۱۹ دو ضرب روی دوگان دوم یک جبر باناخ تعریف کرد تا بتواند آن را به یک جبر باناخ تبدیل کند. در واقع این ضربها توسیع ضرب معمولی روی جبر می‌باشند. به این ضربها ضرب آرنز اول و دوم گفته می‌شود که به ترتیب با نمادهای  $\square$  و  $\diamond$  نمایش داده می‌شوند که به ازای هر  $F, G \in \mathcal{A}^{**}, f \in \mathcal{A}^*$  و  $a, b \in \mathcal{A}$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}\langle F \square G, f \rangle &= \langle F, G \cdot f \rangle, & \langle F \diamond G, f \rangle &= \langle G, f \cdot F \rangle, \\ \langle G \cdot f, a \rangle &= \langle G, f \cdot a \rangle, & \langle f \cdot F, a \rangle &= \langle F, a \cdot f \rangle,\end{aligned}$$

9

$$\langle f \cdot a, b \rangle = \langle f, ab \rangle, \quad \langle a \cdot f, b \rangle = \langle f, ba \rangle.$$

ملاحظه ۱.۲. اگر  $\mathcal{A}$  یک جبر باناخ باشد و  $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$  آنگاه توسیع یکتایی از  $\varphi$  مانند  $\tilde{\varphi} \in \Delta(\mathcal{A}^{**})$  وجود دارد. درواقع برای هر  $F \in \mathcal{A}^{**}, \tilde{\varphi}$  را به صورت  $\tilde{\varphi}(F) = F(\varphi)$  تعریف می‌کنیم. فرض کنیم برای جبرهای باناخ  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  و  $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$  و  $\psi \in \Delta(\mathcal{B})$  اگر  $\tilde{\varphi}$  و  $\tilde{\psi}$  به ترتیب توسیع‌های یکتایی از  $\varphi$  و  $\psi$  باشند، آنگاه برای هر  $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}, F \in \mathcal{A}^{**}$  و  $G \in \mathcal{B}^{**}$  قرار می‌دهیم

$$\varphi \otimes \psi(a \otimes b) = \varphi(a)\psi(b), \quad \tilde{\varphi} \otimes \tilde{\psi}(F \otimes G) = F(\varphi)G(\psi), \quad \tilde{\varphi}(F \square G) = \tilde{\varphi}(F)\tilde{\varphi}(G). \quad (2.2)$$

تعریف ۲.۲. جبر باناخ  $\mathcal{A}$  را  $\mathcal{A}^{**}$ -دوتصویر گوئیم هر گاه همریختی پیوسته  $\mathcal{A}$ -دومدولی  $\hat{\mathcal{A}}^{**} \otimes \mathcal{A}^{**} \rightarrow \mathcal{A}^{**}$  وجود داشته باشد که برای هر  $a, b \in \mathcal{A}$  در شرایط زیر صدق کند

$$\rho(a \cdot b) = \rho(a) \cdot b = a \cdot \rho(b), \quad \pi_{\mathcal{A}^{**}} \circ \rho(a) = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(a), \quad (3.2)$$

که در آن  $\pi_{\mathcal{A}^{**}} : \hat{\mathcal{A}}^{**} \otimes \mathcal{A}^{**} \rightarrow \mathcal{A}^{**}$  عملگر ضربی با ضابطه‌ی  $\pi_{\mathcal{A}^{**}}(F \otimes G) = F \square G$  می‌باشد.

مثال ۳.۲. الف) فرض کنیم  $\mathcal{A}$  یک جبر باناخ باشد به طوری که  $\overline{\mathcal{A}^2} \neq \mathcal{A}$ . آنگاه بنا بر [۶، لم ۱.۷] و قضیه هان-باناخ،  $\mathcal{A}$  نمی‌تواند  $\mathcal{A}^{**}$ -دوتصویر باشد. در واقع، اگر  $\mathcal{A}$  یک جبر باناخ  $\mathcal{A}^{**}$ -دوتصویر باشد، آنگاه لزوماً  $\mathcal{A}^2$  در  $\mathcal{A}$  چگال است. ب) فرض کنیم  $G$  یک گروه فشرده موضعی باشد. بنا بر قضیه جانسون و مفاهیم بالا اگر  $G$  میانگین‌پذیر نباشد آنگاه جبر گروه‌ی  $L^1(G)^{**}, L^1(G)$ -دوتصویر نمی‌باشد.

تعریف ۴.۲. تور  $(e_{\alpha})_{\alpha}$  را همانی تقریبی چپ (راست) جبر باناخ  $\mathcal{A}$  گوئیم هرگاه برای هر  $a \in \mathcal{A}$ ،  $a(e_{\alpha} \rightarrow a) \rightarrow a$ ،  $e_{\alpha} a \rightarrow a$  همانی تقریبی  $(e_{\alpha})_{\alpha}$  را کران‌دار گوئیم هرگاه  $K > 0$  وجود داشته باشد که به ازای هر  $\alpha$ ،  $\|e_{\alpha}\| \leq K$ . جبر باناخ  $\mathcal{A}$  دارای همانی تقریبی کران‌دار است هرگاه دارای همانی تقریبی چپ کران‌دار و راست کران‌دار باشد.

بنا بر [۱۵، گزاره ۱.۲]، یک جبر باناخ دوگان، همانی دارد اگر و فقط اگر همانی تقریبی کران‌دار داشته باشد. مثال زیر نشان می‌دهد که برای جبر باناخ  $\mathcal{A}$ ، خاصیت  $\mathcal{A}^{**}$ -دوتصویری، نقش عمده‌ای در میانگین‌پذیری و شبه میانگین‌پذیری  $\mathcal{A}$  ایفا می‌کند.

مثال ۵.۲. الف) فرض کنیم  $\mathcal{A}$  یک جبر باناخ با همانی تقریبی کران‌دار باشد. اگر  $\mathcal{A}$  میانگین‌پذیر نباشد آنگاه  $\mathcal{A}^{**}$ -دوتصویر نخواهد بود.

ب) فرض کنیم  $\mathcal{A}$  یک جبر باناخ با همانی تقریبی کران‌دار باشد که شبه میانگین‌پذیر نیست، در این صورت  $\mathcal{A}^{**}$ -دوتصویر نخواهد بود. در این مثال خاصیت همانی تقریبی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است زیرا برای نمونه فرض کنیم  $S$  نیم گروه صفر چپ با حداقل دو عضو باشد؛ یعنی برای هر  $s, s' \in S$  داشته باشیم  $ss' = s$ . آنگاه جبر نیم‌گروهی  $l^1(S)$  میانگین‌پذیر (شبه میانگین‌پذیر) نیست، زیرا فاقد همانی تقریبی است. در صورتی که  $l^1(S)^{**}, l^1(S)$ -دوتصویر می‌باشد.

در قضیه‌ی زیر به بررسی رابطه‌ی بین دوتصویر بودن دو جبر باناخ و دوتصویر بودن حاصل ضرب تانسوری تصویری آنها می‌پردازیم. در واقع نشان می‌دهیم خاصیت موروثی دوگان دوم-دوتصویری جبرهای باناخ به حاصل ضرب تانسوری تصویری آنها منتقل می‌شود.

قضیه ۶.۲. فرض کنیم  $\mathcal{A}$  یک جبر باناخ  $\mathcal{A}^{**}$ -دوتصویر و  $\mathcal{B}$  یک جبر باناخ  $\mathcal{B}^{**}$ -دوتصویر با همانی‌های تقریبی کران‌دار باشند. اگر  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  یک جبر باناخ باشد، آنگاه  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}^{**}, (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}$ -دوتصویر است.

اثبات. ضرب روی  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  را به صورت

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = ac \otimes bd, \quad (a, c \in \mathcal{A}, b, d \in \mathcal{B}),$$

در نظر می گیریم. فرض کنیم  $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ ،  $(e_\alpha)_\alpha$  همانی تقریبی کراندار  $\mathcal{A}$  و  $(e_\beta)_\beta$  همانی تقریبی کراندار  $\mathcal{B}$  باشند، در این صورت  $(e_\alpha \otimes e_\beta)_{\alpha, \beta}$  همانی تقریبی کراندار  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  خواهد بود. فرض کنیم  $\mathcal{K}_\mathcal{A} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{**}$  و  $\mathcal{K}_\mathcal{B} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^{**}$  نشانده های طبیعی

۹

$$\rho_\mathcal{A} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{A}^{**}, \quad a \mapsto \mathcal{K}_\mathcal{A}(a) \otimes \mathcal{K}_\mathcal{A}(e_\alpha)$$

۹

$$\rho_\mathcal{B} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{B}^{**}, \quad b \mapsto \mathcal{K}_\mathcal{B}(b) \otimes \mathcal{K}_\mathcal{B}(e_\beta)$$

به ترتیب همریختی های پیوسته  $\mathcal{A}$ -دومدولی و  $\mathcal{B}$ -دومدولی باشند و  $\Phi : \mathcal{A}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{A}^{**} \rightarrow (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**}$  و  $\Psi : \mathcal{B}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{B}^{**} \rightarrow (\mathcal{B} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}$  نگاشت هایی هستند که در [۱۰۷، لم ۶] صدق می کنند. فرض کنیم  $a, a' \in \mathcal{A}$  و  $b, b' \in \mathcal{B}$ . با توجه به فرضیات بالا نگاشت

$$\Phi \otimes \Psi : (\mathcal{A}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{A}^{**}) \hat{\otimes} (\mathcal{B}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{B}^{**}) \rightarrow (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**} \hat{\otimes} (\mathcal{B} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**},$$

با ضابطه

$$(\mathcal{K}_\mathcal{A}(a) \otimes \mathcal{K}_\mathcal{A}(a')) \otimes (\mathcal{K}_\mathcal{B}(b) \otimes \mathcal{K}_\mathcal{B}(b')) \mapsto \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}}(a \otimes a') \otimes \mathcal{K}_{\mathcal{B} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(b \otimes b')$$

و نگاشت خطی

$$\lambda : (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**} \hat{\otimes} (\mathcal{B} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**} \rightarrow (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**} \hat{\otimes} (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**},$$

با ضابطه

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}}(a \otimes a') \otimes \mathcal{K}_{\mathcal{B} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(b \otimes b') \mapsto \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(a \otimes b) \otimes \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(a' \otimes b')$$

را در نظر می گیریم. قرار می دهیم  $\rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}} := \lambda \circ (\Phi \otimes \Psi) \circ (\rho_\mathcal{A} \otimes \rho_\mathcal{B})$ . نشان می دهیم که  $\rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}$  در رابطه ی

$$\pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} \circ \rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(a \otimes b) = \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(a \otimes b),$$

صدق می کند که در آن عملگر ضربی با ضابطه ی زیر است

$$\pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} : (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**} \hat{\otimes} (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**} \rightarrow (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}; \quad \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(a \otimes b) \otimes \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(a' \otimes b') \mapsto \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(aa' \otimes bb').$$

فرض کنیم  $a \in \mathcal{A}$  و  $b \in \mathcal{B}$ . از آنجا که  $a \rightarrow ae_\alpha$  و  $b \rightarrow be_\beta$  و  $(e_\alpha \otimes e_\beta)$  همانی تقریبی کراندار  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  است، با قرار دادن  $\rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(a \otimes b) = \rho_\mathcal{A}(a) \otimes \rho_\mathcal{B}(b)$  خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} \circ \rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(a \otimes b) &= \pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} \circ \lambda \circ (\Phi \otimes \Psi) \circ (\rho_\mathcal{A} \otimes \rho_\mathcal{B})(a \otimes b) \\ &= \pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} \circ \lambda \circ (\Phi \otimes \Psi) \circ (\rho_\mathcal{A}(a) \otimes \rho_\mathcal{B}(b)) \\ &= \pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} \circ \lambda \circ (\Phi \otimes \Psi) ((\mathcal{K}_\mathcal{A}(a) \otimes \mathcal{K}_\mathcal{A}(e_\alpha)) \otimes (\mathcal{K}_\mathcal{B}(b) \otimes \mathcal{K}_\mathcal{B}(e_\beta))) \\ &= \pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} \circ \lambda (\Phi(\mathcal{K}_\mathcal{A}(a) \otimes \mathcal{K}_\mathcal{A}(e_\alpha)) \otimes \Psi(\mathcal{K}_\mathcal{B}(b) \otimes \mathcal{K}_\mathcal{B}(e_\beta))) \\ &= \pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} \circ \lambda (\mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}}(a \otimes e_\alpha) \otimes \mathcal{K}_{\mathcal{B} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(b \otimes e_\beta)) \\ &= \pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} (\mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(a \otimes b) \otimes \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(e_\alpha \otimes e_\beta)) \\ &= \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(ae_\alpha \otimes be_\beta) \\ &= \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(a \otimes b). \end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم  $\rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}$  همریختی پیوسته  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$ -دومدولی است. فرض کنیم  $a, c \in \mathcal{A}$  و  $b, d \in \mathcal{B}$ . بنا بر خواص  $\Phi$  و  $\Psi$  در [۱.۷] داریم

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}((a \otimes b) \cdot (c \otimes d)) &= \lambda \circ (\Phi \otimes \Psi) \circ (\rho_{\mathcal{A}} \otimes \rho_{\mathcal{B}})(ac \otimes bd) \\ &= \lambda \circ (\Phi \otimes \Psi) \circ (\rho_{\mathcal{A}}(a) \cdot c \otimes \rho_{\mathcal{B}}(b) \cdot d) \\ &= \lambda \circ (\Phi(\rho_{\mathcal{A}}(a) \cdot c) \otimes \Psi(\rho_{\mathcal{B}}(b) \cdot d)) \\ &= \lambda \circ [\Phi(\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(a) \otimes \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(e_{\alpha})) \cdot c \otimes \Psi(\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(b) \otimes \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(e_{\beta})) \cdot d] \\ &= \lambda[(\mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}}(a \otimes e_{\alpha}) \otimes \mathcal{K}_{\mathcal{B} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(b \otimes e_{\beta})) \cdot (c \otimes d)] \\ &= (\mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(a \otimes b) \otimes \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(e_{\alpha} \otimes e_{\beta})) \cdot (c \otimes d) \\ &= \rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(a \otimes b) \cdot (c \otimes d). \end{aligned}$$

□

مثال ۷.۲. فرض کنیم  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \circ \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{pmatrix}$ . در این صورت با جمع و ضرب اسکالر و ضرب معمولی ماتریسی و نرم زیر،  $\mathcal{A}$  یک جبر باناخ است.

$$\left\| \begin{pmatrix} a & \circ \\ b & c \end{pmatrix} \right\| = |a| + |b| + |c|, \quad (a, b, c \in \mathbb{C}).$$

بدیهی است که  $e_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{pmatrix}$  و  $e_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{pmatrix}$  به ترتیب همانی‌های (تقریبی)  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$  می‌باشند. تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{**}; \quad \mathcal{K}_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} a & \circ \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} a & \circ \\ b & c \end{pmatrix}, \quad (a, b, c \in \mathbb{C}),$$

۹

$$\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{A}^{**}; \quad \rho \begin{pmatrix} a & \circ \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & \circ \\ b & c \end{pmatrix}, \quad (a, b, c \in \mathbb{C}).$$

لذا جبر باناخ  $\mathcal{A}$ ،  $\mathcal{A}^{**}$ -دوتصویر می‌باشد. از آنجا که  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$  با ضرب

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = ac \otimes bd, \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}),$$

یک جبر باناخ است، به سادگی می‌توان نشان داد که  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$ ،  $(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**}$ -دوتصویر می‌باشد.

نتیجه ۸.۲. فرض کنیم  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$  به ترتیب جبرهای باناخ  $\mathcal{A}_1^{**}$ -دوتصویر،  $\mathcal{A}_2^{**}$ -دوتصویر،  $\dots$ ،  $\mathcal{A}_n^{**}$ -دوتصویر باشند. اگر  $\mathcal{A}_1 \hat{\otimes} \mathcal{A}_2 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \mathcal{A}_n$  یک جبر باناخ باشد آن‌گاه  $\mathcal{A}_1 \hat{\otimes} \mathcal{A}_2 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \mathcal{A}_n$ ،  $(\mathcal{A}_1 \hat{\otimes} \mathcal{A}_2 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \mathcal{A}_n)^{**}$ -دوتصویر است.

□

اثبات. بنا به قضیه ۶.۲ و استقرای ریاضی نتیجه مطلوب بدست می‌آید.

در مثال بعد نشان می‌دهیم که اگر حاصل ضرب تانسوری تصویری دو جبر باناخ، دوگان دوم-دوتصویر نباشد، آنگاه حداقل یکی از آنها این خاصیت را دارد.

مثال ۹.۲. فرض کنیم

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \circ & a & b \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}; \ a, b \neq \circ \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ a' & \circ & \circ \\ b' & \circ & \circ \end{pmatrix} : a', b' \in \mathbb{C}; \ a', b' \neq \circ \right\}.$$

در این صورت با جمع و ضرب اسکالر و ضرب معمولی ماتریسی و نرم‌های

$$\left\| \begin{pmatrix} \circ & a & b \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{A}} = |a| + |b|; \quad (a, b \in \mathbb{C}), \quad \left\| \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ a' & \circ & \circ \\ b' & \circ & \circ \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{B}} = |a'| + |b'|; \quad (a', b' \in \mathbb{C}),$$

$\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  دو جبر باناخ اند. همچنین،  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  با ضرب

$$(\alpha \otimes \beta) \cdot (\gamma \otimes \delta) = \alpha\gamma \otimes \beta\delta, \quad (\alpha, \gamma \in \mathcal{A}, \beta, \delta \in \mathcal{B}), \quad (۴.۲)$$

به یک جبر باناخ تبدیل می شود. داریم

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^\gamma &= (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) \cdot (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) \\ &= \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \\ &\neq \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}. \end{aligned}$$

در نتیجه بنا بر مثال (۲.۲) قسمت (الف)، جبر باناخ  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$ ،  $(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}$  -دو تصویر نمی باشد. اینک نشان می دهیم یا  $\mathcal{A}^{**}$  -دو تصویر نمی باشد یا  $\mathcal{B}^{**}$  -دو تصویر نمی باشند (حداقل یکی از آنها). برای این منظور داریم

$$\mathcal{A}^\gamma = \begin{pmatrix} \circ & a & b \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \circ & a & b \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \neq \mathcal{A}, \quad (a, b \in \mathcal{A}; \quad a, b \neq \circ).$$

به همین ترتیب،  $\mathcal{B}^\gamma \neq \mathcal{B}$ . نتیجه گیری مثال بالا بر اساس مفهوم عکس نقیض قضایای ۶.۲ و ۸.۲ می باشد.

تعریف ۱۰.۲. فرض کنیم  $\mathcal{A}$  یک جبر باناخ باشد و  $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ . گوییم  $\varphi$  -میانگین پذیر چپ است هرگاه تور کران دار  $(m_\alpha) \subseteq \mathcal{A}$  موجود باشد به طوری که برای هر  $a \in \mathcal{A}$

$$am_\alpha - \varphi(a)m_\alpha \rightarrow \circ, \quad \varphi(m_\alpha) \rightarrow 1.$$

قضیه ۱۱.۲. فرض کنیم  $\mathcal{A}$ ،  $\mathcal{B}$  و  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  جبرهای باناخ،  $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$  و  $\psi \in \Delta(\mathcal{B})$ . فرض کنیم  $\varphi$  -میانگین پذیر چپ و  $\mathcal{B}$ ،  $\psi$  -میانگین پذیر چپ باشند. در این صورت  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$ ،  $\varphi \otimes \psi$  -میانگین پذیر چپ است.

اثبات. طبق تعریف، تورهای کراندار  $(m_\alpha) \subseteq \mathcal{A}$  و  $(n_\alpha) \subseteq \mathcal{B}$  وجود دارند به طوری که برای هر  $a \in \mathcal{A}$  و  $b \in \mathcal{B}$

$$am_\alpha - \varphi(a)m_\alpha \rightarrow \circ, \quad \varphi(m_\alpha) \rightarrow 1$$

و

$$bn_\alpha - \psi(b)n_\alpha \rightarrow \circ, \quad \psi(n_\alpha) \rightarrow 1.$$

می دانیم  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  با ضرب

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = ac \otimes bd, \quad (a, c \in \mathcal{A}, b, d \in \mathcal{B}),$$

یک جبر باناخ می باشد لذا بنا بر رابطه (۲.۲)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi(m_\alpha \otimes n_\alpha) &= \varphi(m_\alpha)\psi(n_\alpha) \\ &\rightarrow 1. \end{aligned}$$

همچنین بنا بر روابط بالا

$$\begin{aligned} (a \otimes b) \cdot (m_\alpha \otimes n_\alpha) - \varphi \otimes \psi(a \otimes b)m_\alpha \otimes n_\alpha &= am_\alpha \otimes bn_\alpha - \varphi(a)\psi(b)m_\alpha \otimes n_\alpha \\ &\rightarrow \varphi(a)m_\alpha \otimes \psi(b)n_\alpha - \varphi(a)\psi(b)m_\alpha \otimes n_\alpha \\ &\rightarrow \varphi(a)m_\alpha \otimes \psi(b)n_\alpha - \varphi(a)m_\alpha \otimes \psi(b)n_\alpha \\ &\rightarrow \circ. \end{aligned}$$

□

بنابراین  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$ ،  $\varphi \otimes \psi$  -میانگین پذیر چپ است.

ملاحظه ۱۲.۲. بر اساس مثال (۵.۲) قسمت (الف) و [۶، لم ۱.۷] اگر  $\mathcal{A}$  یک جبر باناخ  $A^{**}$ -دوتصویر با همانی تقریبی چپ (راست) و  $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ ، آنگاه  $\mathcal{A}$ ،  $\varphi$  - میانگین پذیر چپ (راست) است.

فرض کنیم  $\mathcal{D}$  یک مجموعه‌ی جهت‌دار شده باشد که دارای کوچک‌ترین عنصر است. فرض کنیم  $UP(\mathcal{D})$  گردایه‌ی همه ماتریس‌های  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$  بالا مثلثی با درایه‌های مختلط زیر باشد

$$UP(\mathcal{D}) = \left\{ [a_{ij}] : a_{ij} \in \mathbb{C}, a_{ij} = 0 \text{ هر } i > j; i, j \in \mathcal{D} \right\}. \quad (۵.۲)$$

$UP(\mathcal{D})$  با ضرب ماتریسی و نرم  $\| [a_{ij}] \|_+ = \sum_{i,j \in \mathcal{D}} \|a_{ij}\|$  تشکیل یک جبر باناخ با همانی تقریبی می‌دهد. ملاحظه کنیم که با در نظر گرفتن ضرب تعریف شده در رابطه (۴.۲) و [۲]،  $UP(\mathcal{D}) \hat{\otimes} UP(\mathcal{D})$  نیز به یک جبر باناخ با همانی تقریبی تبدیل می‌شود. در گزاره زیر نشان می‌دهیم که جبر باناخ تعریف شده در بالا یعنی  $UP(\mathcal{D})^{**}$ ،  $UP(\mathcal{D})$ -دوتصویر نیست.

گزاره ۱۳.۲. فرض کنیم مجموعه  $\mathcal{D}$  حداقل دارای دو عضو و همچنین دارای خاصیت کوچک‌ترین عنصر باشد. در این صورت جبر باناخ  $UP(\mathcal{D})^{**}$ ،  $UP(\mathcal{D})$ -دوتصویر نمی‌باشد.

اثبات. فرض کنیم  $UP(\mathcal{D})$  جبر باناخ  $UP(\mathcal{D})^{**}$ -دوتصویر باشد. آنگاه یک مشخصه مانند  $\chi$  روی  $UP(\mathcal{D})$  می‌توان تعریف کرد. اینک بنا بر توجه (۱۲.۲)، جبر  $UP(\mathcal{D})$ ،  $\chi$ -میانگین پذیر چپ خواهد بود. لذا بنا بر [۳.۱، لم ۱.۵]، یک ایده‌آل بسته مانند  $\mathcal{I} \subseteq UP(\mathcal{D})$  وجود دارد که تحدید  $\chi$  به آن ناصفر و  $\chi|_{\mathcal{I}} = \chi|_{\mathcal{I}}$ -میانگین پذیر چپ است. این موضوع با تعریف (۱۰.۲) در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و  $UP(\mathcal{D})$  جبر باناخ  $UP(\mathcal{D})^{**}$ -دوتصویر نمی‌باشد.  $\square$

لم ۱۴.۲. فرض کنیم  $\mathcal{D}_1$  و  $\mathcal{D}_2$  مجموعه‌های جهت‌دار شده با کوچکترین عنصر باشند به طوری که  $|\mathcal{D}_1| > 1$  و  $|\mathcal{D}_2| > 1$ . در این صورت  $UP(\mathcal{D}_1) \hat{\otimes} UP(\mathcal{D}_2)$ ،  $UP(\mathcal{D}_1) \hat{\otimes} UP(\mathcal{D}_2)^{**}$ -دوتصویر نیست.

اثبات. فرض کنیم حکم لم، گزاره درستی باشد یعنی  $UP(\mathcal{D}_1) \hat{\otimes} UP(\mathcal{D}_2)^{**}$ ،  $UP(\mathcal{D}_1) \hat{\otimes} UP(\mathcal{D}_2)$ -دوتصویر نباشد. بنا به عکس نقیض قضیه ۶.۲، باید نشان دهیم که یا  $UP(\mathcal{D}_1)^{**}$ ،  $UP(\mathcal{D}_1)$ -دوتصویر نیست یا  $UP(\mathcal{D}_2)^{**}$ ،  $UP(\mathcal{D}_2)$ -دوتصویر نیست. بر اساس گزاره ۱۳.۲، هر دو گزاره اخیر درست می‌باشند و لذا اثبات تمام است.  $\square$

مثال ۱۵.۲. فرض کنیم  $\mathcal{D} = \{1, 2, 3\}$ . تعریف می‌کنیم

$$UP(\mathcal{D}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{C}; i, j \in \mathcal{D} \right\}. \quad (۶.۲)$$

می‌دانیم  $UP(\mathcal{D})$  با ضرب ماتریسی و نرم

$$\|A\|_{UP(\mathcal{D})} = \sum_{i,j=1}^3 \|a_{ij}\|; \quad (A \in UP(\mathcal{D})),$$

تشکیل یک جبر باناخ می‌دهد. بدیهی است که  $UP(\mathcal{D})$  دارای همانی (تقریبی کراندار)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  می‌باشد. به سادگی می‌توان نشان داد که  $UP(\mathcal{D})^{**}$ ،  $UP(\mathcal{D})$ -دوتصویر نیست.

در قضیه زیر نشان می‌دهیم که اگر  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  به ترتیب، جبرهای باناخ  $A^{**}$ -دوتصویر و  $B^{**}$ -دوتصویر باشند آن‌گاه بنا بر ملاحظه ۱۲.۲ و تحت شرایطی، خاصیت  $\varphi \otimes \psi$ -میانگین پذیری چپ به طور موروثی به  $\hat{\mathcal{A}} \hat{\otimes} \hat{\mathcal{B}}$  منتقل می‌شود.

قضیه ۱۶.۲. فرض کنیم  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  دو جبر باناخ با همانی‌های تقریبی چپ (راست) باشند،  $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$  و  $\psi \in \Delta(\mathcal{B})$ . اگر  $\mathcal{A}$ ،  $A^{**}$ -دوتصویر و  $\mathcal{B}$ ،  $B^{**}$ -دوتصویر و  $\hat{\mathcal{A}} \hat{\otimes} \hat{\mathcal{B}}$  یک جبر باناخ باشد آن‌گاه  $\hat{\mathcal{A}} \hat{\otimes} \hat{\mathcal{B}}$ ،  $\varphi \otimes \psi$ -میانگین پذیر چپ (راست) است.

اثبات. از آنجا که  $\mathcal{A}$ ،  $\mathcal{A}^{**}$  -دوتصویر و  $\mathcal{B}$ ،  $\mathcal{B}^{**}$  -دوتصویر هستند، طبق قضیه ۶.۲، همربختی پیوسته  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  -دومدولی

$$\rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}} : \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**} \hat{\otimes} (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}, \quad (۷.۲)$$

وجود دارد به طوریکه

$$\pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} \circ \rho(a \otimes b) = \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(a \otimes b), \quad (۸.۲)$$

که در آن  $\pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} : (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**} \hat{\otimes} (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**} \rightarrow (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}$  عملگر ضربی و  $\mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}$  نشان دهنده نشاندهی طبیعی است. نگاشت های  $\Phi : \mathcal{A}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{A}^{**} \rightarrow (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**}$  و  $\Psi : \mathcal{B}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{B}^{**} \rightarrow (\mathcal{B} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}$  وجود دارند به طوری که در شرایط [۶]، لم ۱.۷ صدق می کنند. فرض کنیم  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  به ترتیب همانی های تقریبی چپ جبرهای باناخ  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  باشند. اینک نگاشت

$$\lambda : (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**} \hat{\otimes} (\mathcal{B} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**} \rightarrow ((\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) \hat{\otimes} (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}))^{**}, \quad (۹.۲)$$

را در نظر گرفته و نگاشت  $\Gamma : \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B} \rightarrow ((\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) \hat{\otimes} \frac{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}{\ker(\varphi \otimes \psi)})^{**}$  را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\Gamma(a \otimes b) = (id_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}} \otimes q)^{**} \circ \lambda \circ (\Phi \otimes \Psi) \circ \rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(a \otimes b), \quad (۱۰.۲)$$

که در آن  $id_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}} : \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  نگاشت همانی و  $q : \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B} \rightarrow \frac{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}{\ker(\varphi \otimes \psi)}$  نگاشت خارج قسمتی است. نگاشت  $id_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}} \otimes q$  یک همربختی  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  -دومدولی است. در نتیجه  $(id_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}} \otimes q)^{**}$  نیز یک همربختی  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  -دومدولی است. بر اساس شناسه ی بالا و [۶]، تمرین ۱.۶، قسمت [B]،  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  نیز دارای همانی تقریبی  $(e_\alpha \otimes e_\beta) \subseteq \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  است. لذا

$$\ker(\varphi \otimes \psi) = \overline{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) \ker(\varphi \otimes \psi)}.$$

در نتیجه برای هر  $k \otimes t \in \ker(\varphi \otimes \psi)$ ، تورهای  $(a_n) \subseteq \mathcal{A}$ ،  $(b_n) \subseteq \mathcal{B}$  و  $(k_n \otimes t_n) \subseteq \ker(\varphi \otimes \psi)$  یافت می شوند به طوری که

$$k \otimes t = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \otimes b_n)(k_n \otimes t_n).$$

از آنجا که  $q|_{\ker(\varphi \otimes \psi)} = 0$ ، لذا بنا بر روابط (۷.۲)، (۹.۲) و (۱۰.۲) داریم

$$\begin{aligned} \Gamma(k \otimes t) &= \Gamma(\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \otimes b_n)(k_n \otimes t_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\Gamma(a_n \otimes b_n)(k_n \otimes t_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (id_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}} \otimes q)^{**} \circ \lambda \circ (\Phi \otimes \Psi) \circ \rho(a_n \otimes b_n) \cdot (k_n \otimes t_n) = 0. \end{aligned}$$

در نتیجه  $\Gamma$ ، یک  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  -دومدول همربختی چپ و کراندار مانند

$$\tilde{\Gamma} : \frac{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}{\ker(\varphi \otimes \psi)} \rightarrow ((\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) \hat{\otimes} \frac{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}{\ker(\varphi \otimes \psi)})^{**},$$

القا می کند. اینک عنصر  $a_* \otimes b_* \in \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  را طوری انتخاب می کنیم که  $\varphi \otimes \psi(a_* \otimes b_*) = 1$ . همچنین، تعریف می کنیم  $m = \tilde{\Gamma}(a_* \otimes b_* + \ker(\varphi \otimes \psi))$ . بنا بر قضیه گلفاند-مازور چون هر عضو غیر صفر جبر باناخ  $\frac{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}{\ker(\varphi \otimes \psi)}$  وارون پذیر است لذا،  $m \in (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}$  به آسانی می توان دید که برای هر  $a \in \mathcal{A}$  و  $b \in \mathcal{B}$  داریم

$$\begin{aligned} (a \otimes b)m &= (a \otimes b)\tilde{\Gamma}(a_* \otimes b_* + \ker \varphi \otimes \psi) \\ &= \tilde{\Gamma}((a \otimes b) \cdot (a_* \otimes b_*) + \ker \varphi \otimes \psi) \\ &= \tilde{\Gamma}(\varphi \otimes \psi(a \otimes b) \cdot (a_* \otimes b_*) + \ker \varphi \otimes \psi) \\ &= \varphi \otimes \psi(a \otimes b)\tilde{\Gamma}(a_* \otimes b_* + \ker \varphi \otimes \psi) \\ &= \varphi \otimes \psi(a \otimes b)m. \end{aligned} \quad (۱۱.۲)$$



فرض کنیم  $\widetilde{\varphi \otimes \psi}$ ، توسیع یکتا از  $\varphi \otimes \psi$  به  $(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^{**}$  باشد. از آنجا که

$$\widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ \pi_{\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}}^{**} = \widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ (id_{\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}} \otimes q)^{**}, \quad (12.2)$$

لذا به کمک روابط (۱۰.۲)، (۱۲.۲) و رابطه‌ی  $\pi_{(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} \circ \lambda \circ (\Phi \otimes \Psi) = \pi_{(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^{**}}$  خاصیت نشانده‌ی طبیعی  $\mathcal{K}_{\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}}$  و ملاحظه ۱.۲ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi \otimes \psi}(m) &= \widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ \widetilde{\Gamma}(a_* \otimes b_* + \ker \varphi \otimes \psi) \\ &= \widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ \Gamma(a_* \otimes b_*) \\ &= \widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ (id_{\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}} \otimes q)^{**} \circ \lambda \circ (\Phi \otimes \Psi) \circ \rho_{\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}}(a_* \otimes b_*) \\ &= \widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ \pi_{\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}}^{**} \circ \lambda \circ (\Phi \otimes \Psi) \circ \rho_{\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}}(a_* \otimes b_*) \\ &= \widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ \pi_{(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} \circ \rho_{\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}}(a_* \otimes b_*) \\ &= \widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ \mathcal{K}_{\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}}(a_* \otimes b_*) \\ &= \varphi \otimes \psi(a_* \otimes b_*) \\ &= \varphi(a_*)\psi(b_*) \\ &= 1. \end{aligned} \quad (13.2)$$

از روابط (۱۱.۲) و (۱۳.۲) نتیجه می‌گیریم که  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ ،  $\varphi \otimes \psi$  - میانگین‌پذیر چپ است.  $\square$

تعریف ۱۷.۲. فرض کنیم  $\mathcal{A}$  یک جبر باناخ،  $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$  و  $\tilde{\varphi}$  توسیع یکتای  $\varphi$  روی  $\mathcal{A}^{**}$  باشد. گوئیم  $\mathcal{A}$ ،  $\varphi$  -  $\mathcal{A}^{**}$  - دوتصویر است هر گاه همریختی پیوسته  $\mathcal{A}$  - دومدولی  $\mathcal{A}^{**} \widehat{\otimes} \mathcal{A}^{**}$ ،  $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{**} \widehat{\otimes} \mathcal{A}^{**}$  موجود باشد به‌طوری که به ازای هر  $a \in \mathcal{A}$

$$\tilde{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}^{**}} \circ \rho(a) = \varphi(a).$$

به وضوح مفهوم  $\varphi$  -  $\mathcal{A}^{**}$  - دوتصویری جبر باناخ  $\mathcal{A}$ ، ضعیف‌تر از مفهوم  $\mathcal{A}^{**}$  - دوتصویری جبر باناخ  $\mathcal{A}$  می‌باشد و از آن نتیجه می‌شود که در ادامه در قالب یک مثال، این مطلب را نشان می‌دهیم. در قضیه‌ی زیر نشان می‌دهیم که  $\varphi$  -  $\mathcal{A}^{**}$  - دوتصویری  $\mathcal{A}$ ، یک خاصیت موروثی است و به حاصل ضرب تانسوری تصویری جبرهای باناخ منتقل می‌شود.

قضیه ۱۸.۲. فرض کنیم  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  جبرهای باناخ با همانی‌های تقریبی کراندار باشند،  $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$  و  $\psi \in \Delta(\mathcal{B})$ . فرض کنیم  $\mathcal{A}$ ،  $\varphi$  -  $\mathcal{A}^{**}$  - دوتصویر و  $\mathcal{B}$ ،  $\psi$  -  $\mathcal{B}^{**}$  - دوتصویر باشند. اگر  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$  یک جبر باناخ باشد، آن گاه  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ ،  $\varphi \otimes \psi$  -  $(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^{**}$  - دوتصویر است.

اثبات. بدیهی است که  $\varphi \otimes \psi \in \Delta(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ . فرض کنیم  $\pi_{(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} : (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^{**} \widehat{\otimes} (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^{**} \rightarrow (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^{**}$  نگاشت ضربی باشد. نشان می‌دهیم یک همریختی پیوسته  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$  - دومدولی مانند

$$\rho_{\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}} : \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^{**} \widehat{\otimes} (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^{**}, \quad (14.2)$$

وجود دارد به‌طوری که برای هر  $a \in \mathcal{A}$  و  $b \in \mathcal{B}$

$$\widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ \pi_{(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} \circ \rho_{\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}}(a \otimes b) = \varphi \otimes \psi(a \otimes b), \quad (15.2)$$

که در آن  $\widetilde{\varphi \otimes \psi}$ ، توسیع یکتایی از  $\varphi \otimes \psi$  روی  $(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^{**}$  است. فرض کنیم  $(e_\alpha) \subseteq \mathcal{A}$  و  $(e_\beta) \subseteq \mathcal{B}$ ، به‌ترتیب همانی‌های تقریبی جبرهای باناخ  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  باشند. از اینرو، بنا بر [۱۶، تمرین ۱.۶، قسمت B]،  $(e_\alpha \otimes e_\beta) \subseteq \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ ، همانی تقریبی جبر باناخ  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$  است. فرض کنیم  $\rho_{\mathcal{A}}$  و  $\rho_{\mathcal{B}}$ ، به‌ترتیب همریختی‌های پیوسته  $\mathcal{A}$  - دومدولی و  $\mathcal{B}$  - دومدولی در تعریف  $\varphi$  -  $\mathcal{A}^{**}$  - دوتصویری  $\mathcal{A}$  و  $\psi$  -  $\mathcal{B}^{**}$  - دوتصویری  $\mathcal{B}$ ، باشند که به صورت

$$\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{**} \widehat{\otimes} \mathcal{A}^{**}; \quad a \mapsto aM \otimes M, \quad (a \in \mathcal{A}, M \in \mathcal{A}^{**}),$$

9

$$\rho_B : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{B}^{**}; \quad b \mapsto bN \otimes N, \quad (b \in \mathcal{B}, N \in \mathcal{B}^{**}),$$

تعریف می کنیم. طبق خواص همریختی ها برای هر  $a, a' \in \mathcal{A}$  و  $b, b' \in \mathcal{B}$  داریم

$$\rho_A(aa') = \rho_A(a) \cdot a' = a \cdot \rho_A(a'), \quad \rho_B(bb') = \rho_B(b) \cdot b' = b \cdot \rho_B(b'). \quad (۱۶.۲)$$

اینک قرار می دهیم

$$\rho_A \otimes \rho_B(a \otimes b) = \rho_A(a) \otimes \rho_B(b), \quad (a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}). \quad (۱۷.۲)$$

بنا بر [۶، لم ۱.۷]، نگاشت های  $\Psi : \mathcal{B}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{B}^{**} \rightarrow (\mathcal{B} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}$  و  $\Phi : \mathcal{A}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{A}^{**} \rightarrow (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**}$  در شرایط [۶، لم ۱.۷] صدق کنند. بنا بر قضیه گلدشتاین از آنجا که دوگان دوم یک جبر باناخ نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره در آن جبر باناخ چگال است، لذا برای  $M \in \mathcal{A}^{**} \subseteq \overline{\mathcal{A}^{**}}$  و  $N \in \mathcal{B}^{**} \subseteq \overline{\mathcal{B}^{**}}$ ، توپولوژی  $(m_\alpha) \subseteq \mathcal{B}$  و  $(n_\beta) \subseteq \mathcal{A}$  وجود دارند به طوری که  $(m_\alpha) \xrightarrow{w^*} M$  و  $(n_\beta) \xrightarrow{w^*} N$ . فرض کنیم به ازای هر  $a, c \in \mathcal{A}$ ،  $b, d \in \mathcal{B}$ ،  $N \in \overline{\mathcal{B}^{**}}$  و  $M \in \overline{\mathcal{A}^{**}}$  فرض کنیم نگاشت

$$\eta : (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**} \hat{\otimes} (\mathcal{B} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**} \rightarrow (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**} \hat{\otimes} (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**},$$

با ضابطه

$$(a \otimes c)MM \otimes (b \otimes d)NN \mapsto (a \otimes b)MN \otimes (c \otimes d)MN, \quad (۱۸.۲)$$

و نگاشت

$$\Phi \otimes \Psi : (\mathcal{A}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{A}^{**}) \hat{\otimes} (\mathcal{B}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{B}^{**}) \rightarrow (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**} \hat{\otimes} (\mathcal{B} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**},$$

با ضابطه

$$(aM \otimes Mc) \otimes (bN \otimes Nd) \mapsto (a \otimes c)MM \otimes (b \otimes d)NN, \quad (۱۹.۲)$$

داده شده باشند. اینک قرار می دهیم

$$\rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}} := \eta \circ (\Phi \otimes \Psi) \circ (\rho_A \otimes \rho_B) : \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**} \hat{\otimes} (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}. \quad (۲۰.۲)$$

نشان می دهیم  $\rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}$  همریختی پیوسته  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  - دومدولی مورد نظر است. می دانیم  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  با ضرب

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = ac \otimes bd, \quad (a, c \in \mathcal{A}, b, d \in \mathcal{B}),$$

یک جبر باناخ،  $(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**}$  یک  $\mathcal{A}$  - دومدول با اعمال مدولی

$$a.(M \otimes Mc) = aM \otimes Mc = (aM \otimes M) \cdot c; \quad (a, c \in \mathcal{A}, M \in \overline{\mathcal{A}^{**}}),$$

و همچنین  $(\mathcal{B} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}$ ، یک  $\mathcal{B}$  - دومدول با اعمال مدولی

$$b.(N \otimes Nd) = bN \otimes Nd = (bN \otimes N) \cdot d; \quad (b, d \in \mathcal{B}, N \in \overline{\mathcal{B}^{**}}),$$

می باشند. حال فرض کنیم  $\mathcal{K}_A : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{**}$ ،  $\mathcal{K}_B : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^{**}$  و  $\mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}} : \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}$  نشانده های طبیعی باشند. قرار می دهیم

$$\pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} = \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}} \circ (\mathcal{K}_A^{-1} \otimes \mathcal{K}_B^{-1}) \circ (\pi_A^{**} \otimes \pi_B^{**}) \circ \eta^{-1}. \quad (۲۱.۲)$$

نشان می‌دهیم که  $\rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}$  تعریف شده در (۲۰.۲) و  $\pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}}$  تعریف شده در (۲۱.۲)، در رابطه (۱۵.۲) صدق می‌کنند. برای این منظور با توجه به اینکه  $(m_\alpha) \xrightarrow{w^*} M$  و  $(n_\beta) \xrightarrow{w^*} N$  و با در نظر گرفتن قضیه گلدشتاین ( $(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**} = \overline{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})}^{w^*}$ )، تور کراندار  $(t_\alpha) \subseteq \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  وجود دارد به طوری که  $(t_\alpha) \xrightarrow{w^*} T$ . لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 & \widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ \pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} \circ \rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(a \otimes b) \\
 &= \widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ \pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}} \circ \rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}((a \otimes b) \cdot (e_\alpha \otimes e_\beta)) \\
 &= \widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}} \circ (\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{-1} \otimes \mathcal{K}_{\mathcal{B}}^{-1}) \circ (\pi_{\mathcal{A}}^{**} \otimes \pi_{\mathcal{B}}^{**}) \circ \overbrace{\eta^{-1} \circ \eta}^I \circ (\Phi \otimes \Psi) \circ \overbrace{(\rho_{\mathcal{A}}(a) \cdot e_\alpha \otimes \rho_{\mathcal{B}}(b) \cdot e_\beta)}^{\rho_{\mathcal{A}}(a) \cdot e_\alpha \otimes \rho_{\mathcal{B}}(b) \cdot e_\beta} \\
 &= \widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}} \circ (\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{-1} \otimes \mathcal{K}_{\mathcal{B}}^{-1}) \circ (\pi_{\mathcal{A}}^{**} \otimes \pi_{\mathcal{B}}^{**}) \circ (\Phi \otimes \Psi) ((aM \otimes Me_\alpha) \otimes (bN \otimes Ne_\beta)) \\
 &= \widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}} \circ (\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{-1} \otimes \mathcal{K}_{\mathcal{B}}^{-1}) \circ (\pi_{\mathcal{A}}^{**} \otimes \pi_{\mathcal{B}}^{**}) \circ (\Phi(aM \otimes Me_\alpha) \otimes \Psi(bN \otimes Ne_\beta)) \\
 &= \widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}} \circ (\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{-1} \otimes \mathcal{K}_{\mathcal{B}}^{-1}) \circ (\pi_{\mathcal{A}}^{**} \otimes \pi_{\mathcal{B}}^{**}) ((a \otimes e_\alpha)MM \otimes (b \otimes e_\beta)NN) \\
 &= \widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}} \circ \overbrace{(\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^{-1} \otimes \mathcal{K}_{\mathcal{B}}^{-1})(a \cdot e_\alpha M^\top \otimes b \cdot e_\beta N^\top)}^{(a \otimes b)} \\
 &= \widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(a \otimes b) \\
 &= \widetilde{\varphi \otimes \psi}((a \otimes b)T) \\
 &= \varphi \otimes \psi(a \otimes b).
 \end{aligned}$$

اینک به کمک [۶، لم ۱۰.۷]، روابط (۱۶.۲) و (۱۷.۲) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 \rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}((a \otimes b) \cdot (c \otimes d)) &= \eta \circ (\Phi \otimes \Psi) \circ (\rho_{\mathcal{A}} \otimes \rho_{\mathcal{B}})(ac \otimes bd) \\
 &= \eta \circ (\Phi \otimes \Psi)(\rho_{\mathcal{A}}(ac) \otimes \rho_{\mathcal{B}}(bd)) \\
 &= \eta \circ (\Phi \otimes \Psi)(\rho_{\mathcal{A}}(a) \cdot c \otimes \rho_{\mathcal{B}}(b) \cdot d) \\
 &= \eta \circ (\Phi \otimes \Psi)(\rho_{\mathcal{A}}(a) \otimes \rho_{\mathcal{B}}(b)) \cdot (c \otimes d) \\
 &= \eta \circ (\Phi \otimes \Psi) \circ (\rho_{\mathcal{A}} \otimes \rho_{\mathcal{B}})(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) \\
 &= \rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}(a \otimes b) \cdot (c \otimes d). \tag{۲۲.۲}
 \end{aligned}$$

از رابطه (۲۲.۲) نتیجه می‌گیریم که  $\rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}$  یک همریختی پیوسته  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$ -دومدولی است. در نتیجه  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$ - $\varphi \otimes \psi$  از رابطه (۱۵.۲) صدق می‌کند.  $\square$

تعریف ۱۹.۲. فرض کنید  $\mathcal{A}$  یک جبر باناخ  $\mathcal{A}^{**}$ -دوتصویر،  $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$  نشاندهی طبیعی،  $\pi_{\mathcal{A}}$  نگاشت ضربی و

$$\Psi : \mathcal{A}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{A}^{**} \rightarrow (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**},$$

نگاشتی باشد که در شرایط [۶، لم ۱۰.۷] صدق کند. در این صورت  $\Psi(m) \in (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**}$  را که در آن  $m \in \mathcal{A}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{A}^{**}$ ، قطری مجازی برای  $\mathcal{A}$  می‌نامیم اگر برای هر  $a \in \mathcal{A}$

$$\pi_{\mathcal{A}}^{**}(\Psi(m))a = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(a), \quad a \cdot \Psi(m) = \Psi(m) \cdot a.$$

در ادامه مثالی از یک جبر باناخ تانسوری تصویری مانند  $\mathcal{A}$  ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد که  $\mathcal{A}^{**}$ -دوتصویری جبر باناخ  $\mathcal{A}$  قوی‌تر از  $\chi$ - $\mathcal{A}^{**}$  دوتصویری  $\mathcal{A}$  است که در آن  $\chi \in \Delta(\mathcal{A})$ . لذا در حالت کلی  $\mathcal{A}^{**}$ -دوتصویری را نمی‌توان از  $\chi$ - $\mathcal{A}^{**}$  دوتصویری نتیجه گرفت.

مثال ۲.۲. فرض کنیم نیم گروه متشکل از مجموعه اعداد طبیعی  $\mathbb{N}$  همراه با عمل ماکسیمم  $m \cdot n = \max\{m, n\}$  را با  $\mathbb{N}_{\max}$  نشان دهیم. جبر نیم گروهی  $\mathcal{A} = l^1(\mathbb{N}_{\max})$  را در نظر گرفته و

$$\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A} = l^1(\mathbb{N}_{\max}) \widehat{\otimes} l^1(\mathbb{N}_{\max}) = l^1(\mathbb{N}_{\max} \widehat{\otimes} \mathbb{N}_{\max}),$$

را مجموعه‌ی تمام توابع مختلط مقدار  $\mathbb{C} : \mathbb{N}_{\max} \widehat{\otimes} \mathbb{N}_{\max} \rightarrow \mathbb{C}$  قرار می‌دهیم به طوری که

$$\|F\|_1 = \sum_{r \otimes n \in \mathbb{N}_{\max} \widehat{\otimes} \mathbb{N}_{\max}} |F(r \otimes n)| < \infty.$$

اکنون جبر  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}$  را به یک جبر باناخ تبدیل می‌کنیم. در راستای همین هدف، برای هر  $F, G \in \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}$  ضرب پیچشی  $F$  و  $G$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F * G(r \otimes n) = \sum_{(a \otimes b)(c \otimes d) = r \otimes n} F(a \otimes b)G(c \otimes d), \quad (r, n \in \mathbb{N}_{\max}),$$

و اگر هیچ دو عضوی مانند  $a \otimes b \in \mathbb{N}_{\max} \widehat{\otimes} \mathbb{N}_{\max}$  و  $c \otimes d \in \mathbb{N}_{\max} \widehat{\otimes} \mathbb{N}_{\max}$  یافت نشود که  $(a \otimes b)(c \otimes d) = r \otimes n$  آن‌گاه

$$\sum_{(a \otimes b)(c \otimes d) = r \otimes n} F(a \otimes b)G(c \otimes d) = 0.$$

در این صورت  $(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}, *, \|\cdot\|_1)$  یک جبر باناخ است که آن را جبر نیم گروهی وابسته به  $\mathbb{N}_{\max} \widehat{\otimes} \mathbb{N}_{\max}$  می‌نامیم. ضرب روی جبر نیم گروهی  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$(F \otimes G) \cdot (F' \otimes G') = FF' \otimes GG'; \quad (F, F', G, G' \in l^1(\mathbb{N}_{\max})).$$

ادعای اول: جبر باناخ  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A} = l^1(\mathbb{N}_{\max} \widehat{\otimes} \mathbb{N}_{\max})$ ،  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}$  دو تصویر نیست. فرض کنیم که این طور نباشد، لذا هم ریختی پیوسته  $\mathcal{A}$  - دومیولی  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A})^{**} \widehat{\otimes} (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A})^{**}$  وجود دارد که برای هر  $F, G \in \mathcal{A}$

$$\pi_{(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A})^{**}} \circ \rho(F \otimes G) = \mathcal{K}_{\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}}(F \otimes G). \quad (23.2)$$

اینک قرار می‌دهیم

$$m = \rho(a_1 \otimes a_2) \in (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A})^{**} \widehat{\otimes} (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A})^{**}, \quad (a_1, a_2 \in \mathcal{A}). \quad (24.2)$$

نشان می‌دهیم  $(\Phi \otimes \Psi)(m)$  قطر مجازی برای  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}$  است. طبق [۶، لم ۱.۷]، برای هر  $F, G \in \mathcal{A}$  داریم

$$\begin{aligned} (F \otimes G) \cdot \Phi \otimes \Psi(m) &= \Phi \otimes \Psi((F \otimes G)m) \\ &= \Phi \otimes \Psi((F \otimes G) \cdot \rho(a_1 \otimes a_2)) \\ &= \Phi \otimes \Psi(\rho((F \otimes G)(a_1 \otimes a_2))) \\ &= \Phi \otimes \Psi(\rho((a_1 \otimes a_2)(F \otimes G))) \\ &= \Phi \otimes \Psi(\rho(a_1 \otimes a_2) \cdot (F \otimes G)) \\ &= \Phi \otimes \Psi(m) \cdot (F \otimes G). \end{aligned} \quad (25.2)$$

همچنین، دوباره بنا به رابطه (۲۴.۲) و [۶، لم ۱.۷]، داریم

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}}^{**}((\Phi \otimes \Psi(m))(F \otimes G)) &= \pi_{\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}}^{**}((\Phi \otimes \Psi) \circ \rho(a_1 \otimes a_2))(F \otimes G) \\ &= \pi_{(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A})^{**}} \circ \rho(a_1 \otimes a_2)(F \otimes G) \\ &= \mathcal{K}_{\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}}(a_1 \otimes a_2)(F \otimes G) \\ &= \mathcal{K}_{\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}}(F \otimes G). \end{aligned} \quad (26.2)$$

بنا به روابط (۲۵.۲) و (۲۶.۲)، نتیجه می‌شود که  $\Phi \otimes \Psi(m)$ ، یک قطر مجازی برای  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$  است. بر اساس قضیه جانسون،  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$  یک جبر باناخ میانگین‌پذیر است. اینک عمل ماکسیمم  $\bullet$  را روی  $\mathbb{N} \hat{\otimes} \mathbb{N}$  برای هر  $m, n, p, r \in \mathbb{N}$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(m, n) \bullet (r, p) = \begin{cases} (m, n); & m + n > r + p \\ (r, p); & m + n < r + p, \end{cases}$$

و اگر  $m + n = r + p$ ، آن‌گاه زوج مرتبی بزرگتر است که حداقل یک مولفه‌ی بزرگتر از سایر مولفه‌ها داشته باشد. در نتیجه مجموعه عناصر خودتوان  $\mathbb{N} \hat{\otimes} \mathbb{N}$  یعنی  $E_{\mathbb{N} \hat{\otimes} \mathbb{N}} = E_{\mathbb{N}_{max} \hat{\otimes} \mathbb{N}_{max}}$ ، باید مجموعه‌ای متناهی باشد و این یک تناقض است. از اینرو جبر باناخ  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$ ،  $(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**}$ -دوتصویر نیست و لذا ادعای اول ثابت می‌شود.

ادعای دوم: اگر  $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ ، آن‌گاه  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$ ،  $\varphi \otimes \varphi$ - $(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**}$ -دوتصویر است. می‌دانیم  $\Delta(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}) = \{\varphi_n \otimes \varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varphi_\infty \otimes \varphi_\infty\}$  که در آن برای هر  $F, G \in l^1(\mathbb{N}_{max})$

$$\varphi_n \otimes \varphi_n(F \otimes G) = \sum_{i,j=1}^n (F \otimes G)(i \otimes j), \quad \varphi_\infty \otimes \varphi_\infty(F \otimes G) = \sum_{i,j=1}^{\infty} (F \otimes G)(i \otimes j).$$

اینک نگاشت  $\rho_n : \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**} \hat{\otimes} (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\rho_n(F \otimes G) := (F \otimes G)m \otimes m, \quad (27.2)$$

که در آن

$$m = \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}}(a_{n+1} - a_n), \quad (a_{n+1}, a_n \in \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}).$$

از آنجا که برای هر  $F, G \in \mathcal{A} = l^1(\mathbb{N}_{max})$

$$(F \otimes G)m = \varphi_n \otimes \varphi_n(F \otimes G)m, \quad (28.2)$$

بنابراین به کمک روابط (۲۷.۲) و (۲۸.۲)، داریم

$$\begin{aligned} \rho_n((F \otimes G) \cdot (F' \otimes G')) &= \rho_n(FF' \otimes GG') \\ &= (FF' \otimes GG')m \otimes m \\ &= \varphi_n \otimes \varphi_n(FF' \otimes GG')m \otimes m. \end{aligned} \quad (29.2)$$

از طرفی دوباره به کمک روابط (۲۷.۲) و (۲۸.۲)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (F \otimes G) \cdot \rho_n(F' \otimes G') &= (F \otimes G) \cdot (F' \otimes G')m \otimes m \\ &= (FF' \otimes GG')m \otimes m \\ &= \varphi_n \otimes \varphi_n(FF' \otimes GG')m \otimes m. \end{aligned} \quad (30.2)$$

لذا بنا بر روابط (۲۹.۲) و (۳۰.۲)،  $\rho_n$  یک هم‌ریختی پیوسته  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$ -دومدولی است. اینک بنا به رابطه (۲۸.۲) داریم

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi_n \otimes \varphi_n} \circ \pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**}} \circ \rho_n(F \otimes G) &= \widetilde{\varphi_n \otimes \varphi_n} \circ \pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**}}((F \otimes G)m \otimes m) \\ &= \widetilde{\varphi_n \otimes \varphi_n}((F \otimes G)mm) \\ &= \varphi_n \otimes \varphi_n(F \otimes G) \widetilde{\varphi_n \otimes \varphi_n}(m) \\ &= \varphi_n \otimes \varphi_n(F \otimes G). \end{aligned}$$

بنابراین  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$ ، یک جبر باناخ  $\varphi_n \otimes \varphi_n$ - $(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**}$ -دوتصویر است. اکنون قرار می‌دهیم

$$M := w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}}(a_n \otimes a_n') \in (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**}.$$

از آنجا که  $(F \otimes G)M = M(F \otimes G) = \varphi_\infty \otimes \varphi_\infty(F \otimes G)M$  لذا مشابه قبل، به سادگی دیده می شود که نگاشت

$$\rho : \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**} \hat{\otimes} (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**},$$

با ضابطه  $\rho(F \otimes G) = (F \otimes G)M \otimes M$  یک همریختی پیوسته  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$ -دومدولی است و داریم

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi_\infty \otimes \varphi_\infty} \circ \pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**}} \circ \rho(F \otimes G) &= \widetilde{\varphi_\infty \otimes \varphi_\infty}((F \otimes G)M^\vee) \\ &= \varphi_\infty \otimes \varphi_\infty(F \otimes G). \end{aligned}$$

نتیجه می گیریم که  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$ ، یک جبر باناخ  $\varphi_\infty \otimes \varphi_\infty - (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**}$ -دوتصویر است و لذا ادعای دوم نیز ثابت می شود. در مجموع، نتیجه می شود که  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$ ، یک جبر باناخ  $\varphi \otimes \varphi - (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**}$ -دوتصویر است در حالی که  $(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})^{**}$ -دوتصویر نیست.

در ادامه، قضیه ۶.۲ را با شرط ضعیف تری روی یکی از جبرهای باناخ و حذف شرط همانی تقریبی کراندار برای هر دو جبر باناخ اثبات می کنیم.

نتیجه ۲۱.۲. فرض کنید  $\mathcal{A}$ ،  $\mathcal{B}$  و  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$  جبرهای باناخ و  $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ . فرض کنید  $\mathcal{A}$ ،  $\varphi - \mathcal{A}^{**}$ -دوتصویر و  $\mathcal{B}$ ،  $\mathcal{B}^{**}$ -دوتصویر باشند. در این صورت  $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}$ ،  $(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})^{**}$ -دوتصویر است.

اثبات. از آنجا که  $\mathcal{B}$ ،  $\mathcal{B}^{**}$ -دوتصویر است لذا همریختی پیوسته  $\mathcal{B}$ -دومدولی  $\rho_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{B}^{**}$  وجود دارد به طوری که برای هر  $b, b' \in \mathcal{B}$

$$\rho_{\mathcal{B}}(b \cdot b') = \rho_{\mathcal{B}}(b) \cdot b' = b \cdot \rho_{\mathcal{B}}(b'), \quad \pi_{\mathcal{B}^{**}} \circ \rho_{\mathcal{B}}(b) = \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(b). \quad (۳۱.۲)$$

فرض کنید  $\tilde{\psi}$  توسیع  $\psi \in \Delta(\mathcal{B})$  روی  $\mathcal{B}^{**}$  باشد. لذا به ازای هر  $b \in \mathcal{B}$

$$\psi(b) = \tilde{\psi} \circ \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(b) = \tilde{\psi} \circ \pi_{\mathcal{B}^{**}} \circ \rho_{\mathcal{B}}(b). \quad (۳۲.۲)$$

نتیجه می گیریم که  $\mathcal{B}$ ،  $\psi - \mathcal{B}^{**}$ -دوتصویر است. از آنجا که  $\mathcal{A}$ ،  $\varphi - \mathcal{A}^{**}$ -دوتصویر است لذا همریختی پیوسته  $\mathcal{A}$ -دومدولی  $\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{A}^{**}$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $a \in \mathcal{A}$

$$\tilde{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}^{**}} \circ \rho_{\mathcal{A}}(a) = \varphi(a).$$

فرض کنیم ضابطه های  $\rho_{\mathcal{B}}$  و  $\rho_{\mathcal{A}}$  بر اساس قضیه ۱۸.۲ باشند. ابتدا نشان می دهیم  $\varphi \otimes \psi(a \otimes b) = \varphi(a)\psi(b)$ . لذا مشابه قضیه ۱۸.۲، فرض کنید  $M \in \mathcal{A}^{**}$  و  $N \in \mathcal{B}^{**}$ . طبق فرضیات قضیه و با در نظر گرفتن ضرب آرنز نوع اول  $\square$  روی جبرهای باناخ  $\mathcal{A}^{**}$  و  $\mathcal{B}^{**}$  داریم

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi(a \otimes b) &= ((\tilde{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}^{**}} \circ \rho_{\mathcal{A}}) \otimes (\tilde{\psi} \circ \pi_{\mathcal{B}^{**}} \circ \rho_{\mathcal{B}}))(a \otimes b) \\ &= (\tilde{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}^{**}} \circ \rho_{\mathcal{A}})(a) (\tilde{\psi} \circ \pi_{\mathcal{B}^{**}} \circ \rho_{\mathcal{B}})(b) \\ &= (\tilde{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}^{**}} \circ \rho_{\mathcal{A}}(a)) (\tilde{\psi} \circ \pi_{\mathcal{B}^{**}} \circ \rho_{\mathcal{B}}(b)) \\ &= (\tilde{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}^{**}}(aM \otimes M)) (\tilde{\psi} \circ \pi_{\mathcal{B}^{**}}(bN \otimes N)) \\ &= (\tilde{\varphi}(aM \square M)) (\tilde{\psi}(bN \square N)) \\ &= \varphi(a)\psi(b). \end{aligned} \quad (۳۳.۲)$$

فرض کنید  $\rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}$ ،  $\eta$  و  $\Phi \otimes \Psi$  همان هایی باشند که در قضیه ۱۸.۲ به کار برده شدند. ادعا می کنیم  $\rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}}$  یک همریختی

پیوسته  $\widehat{A \otimes B}$  - دودولی است. بدست می آوریم

$$\begin{aligned}
 \rho_{\widehat{A \otimes B}}((a \otimes b) \cdot (c \otimes d)) &= \eta \circ (\Phi \otimes \Psi) \circ (\rho_A \otimes \rho_B)(ac \otimes bd) \\
 &= \eta \circ (\Phi \otimes \Psi)(\rho_A(ac) \otimes \rho_B(bd)) \\
 &= \eta \circ (\Phi \otimes \Psi)(\rho_A(a) \cdot c \otimes \rho_B(b) \cdot d) \\
 &= \eta \circ (\Phi \otimes \Psi)((aM \otimes M) \cdot c \otimes (bN \otimes N) \cdot d); (M \in \mathcal{A}^{**}, N \in \mathcal{B}^{**}) \\
 &= \eta \circ (\Phi \otimes \Psi)((aM \otimes Mc) \otimes (bN \otimes Nd)) \\
 &= \eta(\Phi(aM \otimes Mc) \otimes \Psi(bN \otimes Nd)) \\
 &= \eta((a \otimes c)MM \otimes (b \otimes d)NN) \\
 &= ((a \otimes b)MN) \otimes ((c \otimes d)MN) \\
 &= \rho_{\widehat{A \otimes B}}(a \otimes b) \cdot (c \otimes d). \tag{۳۴.۲}
 \end{aligned}$$

و از طرفی

$$\begin{aligned}
 \pi_{(\widehat{A \otimes B})^{**}} \circ \rho_{\widehat{A \otimes B}}(a \otimes b) &= \mathcal{K}_{\widehat{A \otimes B}} \circ (\mathcal{K}_A^{-1} \otimes \mathcal{K}_B^{-1}) \circ (\pi_{\mathcal{A}^{**}} \otimes \pi_{\mathcal{B}^{**}}) \circ \overbrace{\eta^{-1} \circ \eta}^I \circ (\Phi \otimes \Psi) \circ \overbrace{(\rho_A \otimes \rho_B)(a \otimes b)}^{\rho_A(a) \otimes \rho_B(b)} \\
 &= \mathcal{K}_{\widehat{A \otimes B}} \circ (\mathcal{K}_A^{-1} \otimes \mathcal{K}_B^{-1}) \circ (\pi_{\mathcal{A}^{**}} \otimes \pi_{\mathcal{B}^{**}}) \circ (\Phi \otimes \Psi)((aM \otimes M) \otimes (bN \otimes N)) \\
 &= \mathcal{K}_{\widehat{A \otimes B}} \circ (\mathcal{K}_A^{-1} \otimes \mathcal{K}_B^{-1}) \circ (\pi_{\mathcal{A}^{**}} \otimes \pi_{\mathcal{B}^{**}}) \circ (\Phi(aM \otimes M) \otimes \Psi(bN \otimes N)) \\
 &= \mathcal{K}_{\widehat{A \otimes B}} \circ (\mathcal{K}_A^{-1} \otimes \mathcal{K}_B^{-1})(\pi_{\mathcal{A}^{**}} \otimes \pi_{\mathcal{B}^{**}}(aMM \otimes bNN)) \\
 &= \mathcal{K}_{\widehat{A \otimes B}} \circ \overbrace{(\mathcal{K}_A^{-1} \otimes \mathcal{K}_B^{-1})(aM \square M \otimes bN \square N)}^{(a \otimes b)} \\
 &= \mathcal{K}_{\widehat{A \otimes B}}(a \otimes b). \tag{۳۵.۲}
 \end{aligned}$$

□

بنا بر روابط (۳۴.۲) و (۳۵.۲)،  $\widehat{A \otimes B}$ ،  $\mathcal{A}^{**} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$  - دوتصویر است.

در قضیه زیر ارتباط بین  $\varphi - \mathcal{A}^{**}$  - دوتصویری و  $\varphi$  - میانگین پذیری جبر باناخ  $\mathcal{A}$  را با در نظر گرفتن خاصیت جابجایی برای  $\mathcal{A}$  بررسی می کنیم.

قضیه ۲۲.۲. فرض کنید  $\mathcal{A}$  یک جبر باناخ جابجایی،  $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$  و  $\mathcal{A}$ ،  $\varphi - \mathcal{A}^{**}$  - دوتصویر باشد. در این صورت  $\mathcal{A}$ ،  $\varphi$  - میانگین پذیر چپ (راست) است.

اثبات. تور کراندار  $(m_\alpha) \subseteq \mathcal{A}$  را طوری انتخاب می کنیم که  $\varphi(m_\alpha) = 1$ . چون  $\mathcal{A}$  جابجایی است لذا به ازای هر  $a \in \mathcal{A}$  داریم  $am_\alpha - m_\alpha a \rightarrow 0$ . فرض کنیم  $\tilde{\varphi} \in \Delta(\mathcal{A}^{**})$ ،  $\tilde{\varphi}$  توسیع  $\varphi$  روی  $\mathcal{A}^{**}$  باشد. از آنجا که  $\mathcal{A}$ ،  $\varphi - \mathcal{A}^{**}$  - دوتصویر است لذا هم ریختی پیوسته  $\mathcal{A}$  - دودولی  $\mathcal{A}^{**} \widehat{\otimes} \mathcal{A}^{**}$  موجود است به طوری که به ازای هر  $a \in \mathcal{A}$

$$\tilde{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}^{**}} \circ \rho(a) = \varphi(a).$$

قرار می دهیم  $\rho(m_\alpha) = \Omega_\alpha \in \mathcal{A}^{**} \widehat{\otimes} \mathcal{A}^{**}$ . لذا  $(\Omega_\alpha)$  یک تور کراندار در  $\mathcal{A}^{**} \widehat{\otimes} \mathcal{A}^{**}$  است. فرض کنیم که  $\mathcal{A}^{**} \widehat{\otimes} \mathcal{A}^{**}$  با اعمال مدولی زیر یک  $\mathcal{A}$  - دودول باناخ باشد

$$a \cdot (G \otimes H) = a \cdot G \otimes H, (G \otimes H) \cdot a = G \otimes H \square a; (a \in \mathcal{A}, G, H \in \mathcal{A}^{**}). \tag{۳۶.۲}$$

و برای هر  $a \in \mathcal{A}$  داریم

$$\begin{aligned}
 a \cdot \Omega_\alpha - \Omega_\alpha \cdot a &= a \cdot \rho(m_\alpha) - \rho(m_\alpha) \cdot a \\
 &= \rho(a \cdot m_\alpha) - \rho(m_\alpha \cdot a) \\
 &\rightarrow 0. \tag{۳۷.۲}
 \end{aligned}$$

همچنین،

$$\tilde{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}^{**}}(\Omega_\alpha) = \varphi(m_\alpha) \rightarrow 1. \quad (38.2)$$

نگاشت  $\Theta : \mathcal{A}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{A}^{**} \rightarrow \mathcal{A}^{**}$  را برای هر  $F, G \in \mathcal{A}^{**}$  با ضابطه زیر در نظر می گیریم

$$\Theta(F \otimes G) = \tilde{\varphi}(G)F. \quad (39.2)$$

واضح است که  $\Theta$  یک عملگر خطی کراندار است که برای هر  $a \in \mathcal{A}$  و  $v = G \otimes H \in \mathcal{A}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{A}^{**}$  در شرایط زیر صدق می کند  
الف)  $\Theta(a \cdot v) = a \cdot \Theta(v)$

برای هر  $G, H \in \mathcal{A}^{**}$  که  $v = G \otimes H$  بنا بر روابط (36.2) و (39.2)، داریم

$$\begin{aligned} \Theta(a \cdot v) &= \Theta(a \cdot (G \otimes H)) \\ &= \Theta(a \cdot G \otimes H) \\ &= \tilde{\varphi}(H)a \cdot G \\ &= a \cdot \tilde{\varphi}(H)G \\ &= a \cdot \Theta(G \otimes H) \\ &= a \cdot \Theta(v). \end{aligned}$$

ب)  $\Theta(v \cdot a) = \tilde{\varphi}(a)\Theta(v)$ 

فرض کنید  $a \in \mathcal{A}$  و  $H, G \in \mathcal{A}^{**}$ . قرار می دهیم

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{A}^{**} \rightarrow \mathbb{C}; \quad \tilde{\varphi}(H \square G) = \tilde{\varphi}(H)\tilde{\varphi}(G).$$

آن گاه برای هر  $G, H \in \mathcal{A}^{**}$  که  $v = G \otimes H$  بنا بر روابط (36.2)، (39.2)، ملاحظه ۱.۲ و جابجایی  $\mathbb{C}$  داریم

$$\begin{aligned} \Theta(v \cdot a) &= \Theta((G \otimes H) \cdot a) \\ &= \Theta(G \otimes H \square a) \\ &= \tilde{\varphi}(H \square a)G \\ &= \tilde{\varphi}(H)\tilde{\varphi}(a)G \\ &= \tilde{\varphi}(a)\tilde{\varphi}(H)G \\ &= \tilde{\varphi}(a)\Theta(G \otimes H) \\ &= \tilde{\varphi}(a)\Theta(v). \end{aligned}$$

ج)  $\tilde{\varphi} \circ \Theta(v) = \tilde{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}^{**}}(v)$ 

برای هر  $a \in \mathcal{A}$  و  $G, H \in \mathcal{A}^{**}$  که  $v = G \otimes H$  بنا بر روابط (39.2)، ملاحظه ۱.۲ و تعریف ۲.۲ داریم

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \circ \Theta(v) &= \tilde{\varphi} \circ \Theta(G \otimes H) \\ &= \tilde{\varphi}(\tilde{\varphi}(H)G) \\ &= \tilde{\varphi}(H)\tilde{\varphi}(G) \\ &= \tilde{\varphi}(H \square G) \\ &= \tilde{\varphi}(\pi_{\mathcal{A}^{**}}(G \otimes H)) \\ &= \tilde{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}^{**}}(v). \end{aligned}$$

قرار می دهیم  $n_\alpha = \Theta(\Omega_\alpha) \in \mathcal{A}^{**}$ . در این صورت  $n_\alpha \subseteq \mathcal{A}^{**}$  یک تور کراندار است که بنا بر روابط (37.2)، (38.2)، قسمت (الف) و قسمت (ب)، برای  $a \in \mathcal{A}$  داریم

$$\begin{aligned} a.n_\alpha - \tilde{\varphi}(a)n_\alpha &= a \cdot \Theta(\Omega_\alpha) - \tilde{\varphi}(a)\Theta(\Omega_\alpha) \\ &= \Theta(a \cdot \Omega_\alpha) - \Theta(\Omega_\alpha \cdot a) \\ &= \Theta(a \cdot \Omega_\alpha - \Omega_\alpha \cdot a) \rightarrow 0. \end{aligned}$$



و همچنین

$$\tilde{\varphi}(n_\alpha) = \tilde{\varphi} \circ \Theta(\Omega_\alpha) = \tilde{\varphi} \circ \pi_{A^{**}}(\Omega_\alpha) \rightarrow 1.$$

برای تکمیل اثبات کافی است که یک تور کراندار مانند  $(n_\gamma)$  در  $A$  یافت شود که به ازای هر  $a \in A$  در روابط زیر صدق کند

$$a \cdot n_\gamma - \varphi(a)n_\gamma \rightarrow 0, \quad \varphi(n_\gamma) \rightarrow 1.$$

تور مورد نظر به کمک لم مازور و قضیه گلدشتاین یافت می‌شود و لذا نتیجه می‌گیریم که  $A$ ،  $\varphi$ -میانگین‌پذیر چپ است. به‌طور مشابه  $\varphi$ -میانگین‌پذیری راست  $A$  نیز نتیجه می‌شود.  $\square$

نتیجه ۲۳.۲. فرض کنید  $A$  و  $A \hat{\otimes} A$  جبرهای باناخ و  $\varphi \in \Delta(A)$ . اگر  $A$ ،  $\varphi$ - $A^{**}$ -دوتصویر و جابجایی با همانی تقریبی چپ(راست) باشد، آنگاه  $A \hat{\otimes} A$ ،  $\varphi \otimes \varphi$ -میانگین‌پذیر چپ(راست) است.

اثبات. جبر باناخ  $A \hat{\otimes} A$  را با ضرب

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = ac \otimes bd, \quad (a, b, c, d \in A), \quad (40.2)$$

در نظر می‌گیریم. از آنجا که  $A$  یک جبر باناخ جابجایی است لذا

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = ac \otimes bd = ca \otimes db = (c \otimes d) \cdot (a \otimes b), \quad (a, b, c, d \in A).$$

در نتیجه  $A \hat{\otimes} A$  نیز یک جبر باناخ جابجایی خواهد بود. فرض کنید  $e_A$  همانی(تقریبی)  $A$  باشد، در نتیجه بر اساس [۱۶، تمرین ۱.۶، قسمت B]،  $e_A \otimes e_A$  یک همانی(تقریبی) برای  $A \hat{\otimes} A$  خواهد بود. از آنجا که  $A$ ،  $\varphi$ - $A^{**}$ -دوتصویر است، لذا بنا بر نتیجه ۱۸.۲،  $A \hat{\otimes} A$ ،  $\varphi \otimes \varphi$ - $(A \hat{\otimes} A)^{**}$ -دوتصویر است. اینک بنا بر قضیه ۲۲.۲،  $A \hat{\otimes} A$ ،  $\varphi \otimes \varphi$ -میانگین‌پذیر چپ(راست) خواهد بود.  $\square$

### ۳ نتیجه‌گیری

در این مقاله، ارتباط برخی از خواصی را که از جبرهای باناخ  $A$  و  $B$  به حاصل‌ضرب تانسوری تصویری  $A \hat{\otimes} B$  به ارث می‌رسند، با برخی از مفاهیم همانستگی مربوطه مانند  $\varphi \otimes \psi$ -میانگین‌پذیری چپ(راست)  $A \hat{\otimes} B$  مورد بررسی قرار گرفت. درواقع، مقایسه‌ای بین دوگان دوم-دوتصویری یک جبر باناخ و نسخه ضعیف‌تر آن،  $\varphi \otimes \psi$ -دوگان دوم-دوتصویری آن جبر باناخ صورت گرفت که مثال‌های رضایت‌بخش حاصل‌شده از نتایج بدست آمده، اهمیت کار را نشان می‌دهد. همچنین، بکارگیری جبرهای باناخ مجهز به خواصی مانند جابجایی و همانی تقریبی کراندار به نتایج جالبی در این راستا منجر گردید.

### ۴ تشکر و قدردانی

این پژوهش با حمایت مالی دانشگاه ولایت انجام شده است. نویسنده مراتب قدردانی و سپاس صمیمانه خود را از دانشگاه ولایت به جهت تأمین منابع مالی مورد نیاز در قالب اعتبار ویژه پژوهشی(گرنه) اساتید و فراهم ساختن زمینه‌های لازم برای انجام این تحقیق که با کد ۹۶ ثبت شده است، اعلام می‌دارد.

### فهرست منابع

[۱] غفاری، علی، شیبانی، مرجان و تمیمی، ابراهیم، ۱۴۰۲. بررسی دوگان جبرهای گروهی تحت یک توپولوژی محذب موضعی. مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، ۲(۱۳)، صص. ۳۰۷-۳۱۵. doi:10.22055/jamm.2023.43770.2164.315

[2] Bonsall, F. F. and J. Duncan., 1973. *Complete normed algebras*. Springer-Verlag, Berlin.

[3] Day, M.M., 1957. Amenable semigroups. *Illinois J. Math.*, 1, pp.509–544. doi:10.1215/ijm/1255380675

- [4] Ghaffari, A., Javadi, S. and Tamimi, E., 2022. Connes Amenability for Certain Product of Banach Algebras, *Wavelets and Linear Algebra*, 9(1), pp.1-14. doi:10.22072/wala.2021.135909.1301
- [5] Ghahramani, F. and Zhang, Y., 2006. Pseudo-contractible Banach algebras. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 142, pp.111-123.
- [6] Ghahramani, F., Loy, R.J. and Willis, G.A., 1996. Amenability and weak amenability of second conjugate Banach algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124, pp.1489-1497. doi:10.1090/s0002-9939-96-03177-2
- [7] Helemskii, A.Ya., 1989. The Homology of Banach and Topological Algebras. *Kluwer Academic Publishers, Holland*, doi:10.1007/978-94-009-2354-6
- [8] Hu, Z., Monfared, M.S. and Traynor, T., 2009. On character amenable Banach algebras. *Studia Math.*, 193, pp.53-78.
- [9] Johnson, B.E., 1972. Cohomology in Banach algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 127.
- [10] Kaniuth, E., Lau, A.T. and Pym, J., 2008. On  $\phi$ -amenability of Banach algebras. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 144, pp.85-96. doi:10.1017/S0305004107000874
- [11] Lau, A.T., 1983. Analysis on a class of Banach algebras with applications to harmonic analysis on locally compact groups and semigroups. *Fund. Math.*, 118, pp.161-175. doi:10.4064/FM-118-3-161-175
- [12] Monfared, M.S., 2008. Character amenability of Banach algebras. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 144, pp.697-706. doi:10.1017/S0305004108001126
- [13] Paterson, A.L.T., 1988. *Amenability*. Math. Surveys Monogr, vol. 29, Amer. Math. Soc, Providence, RI.
- [14] Rostami, M. and Sahami, A., 2023.  $\mathcal{A}^{**}$ -biprojectivity of Banach algebras. *Measure Algebras and Applications*, 1(1), pp.128-140. doi:10.22091/MAA.2023.9829.1011
- [15] Runde, V., 2001. Amenability for dual Banach algebras. *Studia Math.*, 148, pp.47-66. doi:10.48550/arXiv.math/0203199
- [16] Runde, V., 2002. *Lectures on Amenability, Lecture Notes in Mathematics* (Volume 1774). Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, doi:10.1007/b82937
- [17] Sahami, A. and Pourabbas, A., 2013. On  $\phi$ -biflat and  $\phi$ -biprojective Banach algebras. *Bull. Belg. Math. Soc.*, Simon Stevin, 20, pp.789-801. doi:10.36045/bbms/1385390764
- [18] Tamimi, E. and Ghaffari, A., 2025. A survey on  $\chi$ -module Connes amenability of semigroup algebras. *Journal of Algebraic Systems*, 13(1), pp.53-67. doi:10.22044/JAS.2023.12900.1702
- [19] Tamimi, E. and Ghaffari, A., 2024. On  $\chi \otimes \eta$ -strong Connes amenability of certain dual Banach algebras. *J. Korean Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure Appl. Math.*, 31(1), 1-19. doi:10.7468/jksmeb.2024.31.1.1
- [20] von Neumann, J., 1929. Zur allgemeinen theorie des mabes. *Fund. Math.*, 13, pp.73-116.
- [21] Zhang, Y., 1999. Nilpotent ideals in a class of Banach algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127, pp.3237- 3242. doi: 10.1090/S0002-9939-99-04896-0



## The second dual-biprojective of projective tensor Banach algebras and their relation with the notions of related cohomology

Ebrahim Tamimi <sup>(1)</sup> <sup>2</sup>

<sup>(1)</sup> Department of Mathematics and Statistics, Velayat University, Iranshahr, Iran

Communicated by: Mohammadesmael Samei

Received: 28 September 2025

Accepted: 30 June 2026

**Abstract:** Let  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  be  $\mathcal{A}^{**}$ -biprojection ( $\varphi$ - $\mathcal{A}^{**}$ -biprojection) and  $\mathcal{B}^{**}$ -biprojection ( $\psi$ - $\mathcal{B}^{**}$ -biprojection) Banach algebras, respectively in which,  $\varphi$  and  $\psi$  are non-zero multiplication linear functionals on  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$ , respectively. In this paper, we investigate the relation of properties which are heriditaried from  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  Banach algebras to the projective tensor product of  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$  with the related cohomology notions such left (right)  $\varphi \otimes \psi$ -amenability of  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ . In particular, we investigate the hereditary properties of  $(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^{**}$ -biprojective and  $\varphi \otimes \psi$ - $(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^{**}$ -biprojective of Banach algebra  $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$  and we present some examples in this direction.

**Keywords:**  $\varphi \otimes \psi$ - $(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^{**}$ -Biprojection, Banach algebras, Left  $\varphi \otimes \psi$ -amenability, Bounded approximate identity, Projective tensor product.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

<sup>2</sup>Corresponding author

E-mail addresses: (E. Tamimi) [e.tamimi@velayat.ac.ir](mailto:e.tamimi@velayat.ac.ir)