رابطه نگاشت‌های از نوع میانگین با سیستم‌های دینامیکی و نقش آنها در حل معادلات تابعی

ابراهیم تمیمی[۱،*] ، مهناز رضایی[۲]

[۱]استادیار دانشگاه ولایت، ایرانشهر، *e.tamimi@velayat.ac.ir*

[۲]استادیار(مدعو)، دانشگاه ولایت، ایرانشهر، *mahnazrezaei۸۳@yahoo.com*

چکیده. در این مقاله، میانگین‌های پایا برای نگاشت‌های از نوع میانگین تولید شده توسط تعمیم‌های طبیعی میانگین‌های کلاسیک حسابی، هندسی و هارمونیک مورد بحث قرار گرفته است. همچنین، با در نظر گرفتن نقاطی از قطر پیوسته به نقش نگاشت‌های از نوع میانگین در حل انواع مختلف معادلات تابعی، به ویژه معادلاتی که در تحلیل ریاضی و کاربردهای آن به وجود می‌آیند، پرداخته شده است. در این فرایند، نقش دنباله تکرارهای نگاشت‌ها بر روی زیرمجموعه‌های فشرده از اهمیت فراوانی برخوردار است. همچنین، ارتباط نگاشت‌های از نوع میانگین با سیستم‌های دینامیکی و حل معادلات تابعی مورد توجه قرار گرفته است. در این راستا نتایج مرتبط دیگری نیز بدست آمده است.

واژه‌های کلیدی: معادلات تابعی، نگاشت‌های از نوع میانگین، تعمیم میانگین‌ها، همگرایی یکنواخت، میانگین پایا .

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 26E60, 39B12.

۱. مقدمه

میانگین‌ها به عنوان یکی از مفاهیم بنیادی در ریاضیات، کاربردهای گسترده‌ای در هندسه، تحلیل ریاضی و علوم محاسباتی دارند. به طور معمول، واژه میانگین به میانگین حسابی تعبیر می‌شود، اما انواع مختلفی از میانگین‌ها، وجود دارند که هر یک ویژگی‌ها و کاربردهای خاص خود را دارند [۵]. میانگین‌ها رابطه نزدیکی با نوع هندسه‌ای که در آنها استفاده می‌شوند دارند، به عبارت دیگر، می‌توان گفت که هر میانگین با هندسه خاص خود در ارتباط است. [۱،۲]. نمونه‌هایی از میانگین‌های متداول عبارتند از:

الف) (میانگین حسابی) $\mathcal{A}(x,y)=\dfrac{x+y}{۲}$،

ب) (میانگین هندسی) $\mathcal{G}(x,y)=\sqrt{xy}$،

ج) (میانگین هارمونیک) $\mathcal{H}(x,y)=\dfrac{۲}{x^{-۱}+y^{-۱}}$.

برای میانگین‌های فوق، نامساوی زیر برقرار است:

$$\mathcal{H}\leq\mathcal{G}\leq\mathcal{A}$$

نظریه میانگین‌ها ارتباط تنگاتنگی با نظریه نامساوی‌ها و توابع محدب دارد. تحقیقات گذشته، به ویژه در مقالات [۲،۳]، نشان داده شده است که هر نگاشت از نوع میانگین، دارای یک میانگین پایای یکتایی است. با این حال، یافتن فرم صریح این میانگین‌های پایا مسئله‌ای پیچیده و نابدیهی است که نیازمند روش‌های پیشرفته در نظریه ارگودیک و ریاضیات محاسباتی می باشد. علاوه بر این، ارتباط میانگین‌های پایا با نقاط ثابت و رفتار تکرارها در نگاشت‌های از نوع میانگین یکی از زمینه های مهم و جذاب تحقیقاتی است. هر نگاشت از نوع میانگین، تحت شرایط معین، یک نقطه ثابت دارد و دنباله‌های تکراری آن به یک میانگین پایای مشخص همگرا می‌شوند [۳–۵]. بررسی این رفتار همگرایی نه تنها از نظر تئوری جذاب است، بلکه در مسائل کاربردی، مانند تحلیل دینامیک سیستم‌ها، نقش حیاتی ایفا می کند.

در این مقاله، فرمهای صریح میانگین‌های پایا برای نگاشت‌های از نوع میانگین تولید شده توسط تعمیم‌های طبیعی میانگین‌های کلاسیک مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. همچنین، به نقش نگاشت‌های از نوع میانگین در حل معادلات

*ارائه دهنده

تابعی به ویژه، معادلاتی که در تحلیل ریاضی و کاربردهای آن به وجود می‌آیند، پرداخته شده است. در این راستا، نتایج مرتبط دیگری نیز بدست آمده است.

۲. تعاریف ونمادها

میانگین‌ها در ریاضیات نقش اساسی دارند و از ابزارهای کلیدی در تحلیل داده‌ها و دینامیک سیستم‌ها محسوب می‌شوند. در این بخش، مفاهیمی مانند میانگین، نگاشت از نوع میانگین و خواص مهم میانگین‌ها مانند تقارن و پایایی ارایه خواهند شد. همچنین به طور ویژه رابطه نگاشت‌های از نوع میانگین با سیستم‌های دینامیکی و نقش آنها در حل معادلات تابعی مورد بررسی قرار می گیرد.

تعریف ۱.۲. [۱] فرض کنیم $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه باشد و $k \in \mathbb{N}$ به‌طوری که $k \geq 2$. در این صورت تابع $M : I^k \to \mathbb{R}$ را میانگین k- متغیره در I گوییم، هرگاه به ازای $x_1, x_2, \cdots, x_k \in I$،

$$\min\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} \leq M(x_1, x_2, \cdots, x_k) \leq \max\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}.$$

میانگین M را اکید گوییم، هرگاه برای تمام دنباله‌های غیرثابت $(x_1, x_2, \cdots, x_k) \in I^K$ نامساوی‌های فوق اکید باشند.

مثال ۲.۲. در زیر سه نمونه از میانگین‌های سه متغیره بیان شده است.

الف) (میانگین حسابی) $\mathcal{A}(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{3}$،

ب) (میانگین هندسی) $\mathcal{G}(x,y,z) = \sqrt[3]{xyz}$،

ج) (میانگین هارمونیک) $\mathcal{H}(x,y,z) = \dfrac{3}{x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}}$ که در آن $x,y,z > 0$.

در ادامه مطالب را برای میانگین‌های مذکور با k متغیر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۳.۲. میانگین M را متقارن گوییم، هرگاه برای هر جایگشت σ از مجموعه $\{1, 2, \cdots, k\}$ و هر $x_1, x_2, \cdots, x_k \in I$،

$$M(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(k)}) = M(x_1, x_2, \cdots, x_k).$$

تعریف ۴.۲. فرض کنیم $I = (0, \infty)$ در این صورت میانگین k- متغیره M در $I = (0,\infty)^k$ را همگن گوییم، هرگاه

$$M(tx_1, tx_2, \cdots, tx_k) = tM(x_1, x_2, \cdots, x_k), \qquad t, x_1, x_2, \cdots, x_k > 0.$$

ملاحظه ۵.۲. میانگین $M : I^k \to \mathbb{R}$ را انعکاسی(بازتابی) گوییم هرگاه برای هر $x \in I$، $M\overbrace{(x, x, \cdots, x)}^{k} = x$.
اگر تابع M انعکاسی و (به طور اکید) صعودی باشد، آن‌گاه M یک میانگین (اکید) در I است.

تعریف ۶.۲. فرض کنیم $M_1, M_2, \cdots, M_k : I^k \to I$ میانگین‌های k- متغیره باشند. در این صورت نگاشت $\mathcal{M} : I^k \to I^k$ را که $\mathcal{M} = (M_1, M_2, \cdots, M_k)$، نگاشت از نوع میانگین می‌گوییم.

تعریف ۷.۲. [۱] فرض کنیم $\mathcal{M} : I^k \to I^k$ نگاشت از نوع میانگین باشد که $\mathcal{M} = (M_1, M_2, \cdots, M_k)$. در این صورت میانگین $K : I^k \to I$ را M- پایا (یا پایا نسبت به نگاشت از نوع میانگین $\mathcal{M} = (M_1, M_2, \cdots, M_k)$) گوییم، هرگاه

$$K \circ (M_1, M_2, \cdots, M_k) = K.$$

به وضوح، اگر K، $\mathcal{M}$- پایا باشد، آن‌گاه

$$\min\{M_1, M_2, \cdots, M_k\} \leq K \leq \max\{M_1, M_2, \cdots M_k\}.$$

ملاحظه ۸.۲. توجه کنیم که میانگین $K : I^k \to I$، $\mathcal{M}$- پایا است اگر و تنها اگر نگاشت از نوع میانگین $\mathcal{K} : I^k \to I^k$، که با $\mathcal{K} = (K, K, \cdots, K)$ تعریف می شود نیز $\mathcal{M}$- پایا باشد، یعنی اگر و تنها $K = K \circ \mathcal{M}$.

لم ۹.۲. [۳] فرض کنیم $M_1, \cdots, M_k : I^k \to I$ میانگین های پیوسته و اکید در $I \subseteq \mathbb{R}$ باشند. در این صورت
الف) یک میانگین $(M_1, \cdots, M_k)$- پایای منحصربه فرد $K : I^k \to I$ وجود دارد.
ب) K پیوسته است و

$$\min\{M_1, \cdots, M_k\} \le K \le \max\{M_1, \cdots, M_k\}.$$

ج) دنباله $((M_1, \cdots, M_k)^n : n \in \mathbb{N})$ از تکرارهای نگاشت از نوع میانگین $(M_1, \cdots, M_k)$ به طور یکنواخت بر زیرمجموعه های فشرده همگرا می شود و

$$\lim_{n\to\infty} (M_1, \cdots, M_k)^n = (K, \cdots, K).$$

د) اگر $M_1, \cdots, M_k$ متقارن باشند، آن گاه K نیز متقارن است.
ه) اگر $I = (0, \infty)$ و $M_1, \cdots, M_k$ همگن باشند، آن گاه K نیز همگن است.

۳. فرمهای صریح میانگین‌های پایا برای نگاشت‌های از نوع میانگین

در این بخش، فرمهای صریح میانگین‌های پایا برای کلاس‌های خاصی از نگاشت های از نوع میانگین ارایه می‌شود. این نتایج ابزارهایی برای حل معادلات تابعی و تحلیل سیستم‌های دینامیکی فراهم می‌کنند. همچنین، برخی نگاشت‌های از نوع میانگین را بررسی می‌کنیم که برای آن‌ها میانگین هندسی، پایا است. تعمیم‌های چند بعدی نگاشت‌های از نوع میانگین را نیز بررسی خواهیم کرد.

گزاره ۱.۳. فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه دلخواه و $M : I^n \to I$ یک میانگین پیوسته و اکید باشد. در این صورت
الف) تابع $N : I^n \to I$ که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$N(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i - M(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

یک میانگین پیوسته و اکید در I است.
ب) میانگین حسابی $\mathcal{A}$، (M, N)- پایا است.
ج) دنباله تکرارهای $(M, N)^n$ که $n \in \mathbb{N}$، به صورت نقطه‌ای بر روی I^n به $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ همگرا می‌شود.

اکنون گزاره ۱.۳ را برای میانگین هندسی بررسی می‌کنیم.

لم ۲.۳. فرض کنید $I \subseteq (0, \infty)$ یک بازه دلخواه و $M : I^n \to I$ یک میانگین پیوسته و اکید باشد. در این صورت
الف) تابع $N : I^n \to I$ که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$N(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{M(x_1, x_2, \cdots, x_n)},$$

یک میانگین پیوسته و اکید در I است.
ب) میانگین هندسی $\mathcal{G}$، (M, N)- پایا است.
ج) دنباله تکرارهای $(M, N)^n$ که $n \in \mathbb{N}$، به صورت نقطه‌ای بر روی I^n به $(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ همگرا می‌شود.

در ادامه گزاره ۱.۳ و لم ۲.۳ را برای میانگین n- بعدی هارمونیک گسترش می‌دهیم.

قضیه ۳.۳. فرض کنید $I \subseteq (0, \infty)$ یک بازه دلخواه و $M : I^n \to I$ یک میانگین پیوسته و اکید باشد. در این صورت
الف) تابع $N : I^n \to I$ که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$N(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i M(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\sum_{i=1}^{n} x_i M(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \prod_{i=1}^{n} x_i},$$

یک میانگین پیوسته و اکید در I است.
ب) میانگین هارمونیک $\mathcal{H}$، (M, N)- پایا است.
ج) دنباله تکرارهای $(M, N)^n$ که $n \in \mathbb{N}$، به صورت نقطه‌ای بر روی I^n به $(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ همگرا می‌شود.

۴. نگاشت‌های از نوع میانگین در حل معادلات تابعی

در این قسمت از مقاله به نقش نگاشت‌های از نوع میانگین در حل معادلات تابعی در قالب قضیه‌ای مهم، می‌پردازیم.

قضیه ۱.۴. فرض کنید تابع $F:(0,\infty)^n\to\mathbb{R}$ در هر نقطه از قطر $\{(x,x):x>0\}$ پیوسته باشد. آنگاه تابع F در معادله تابعی زیر صدق می‌کند

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F\Big(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},\frac{n\prod_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i}\Big);\quad (x_i>0) \tag{1}$$

اگر و تنها اگر یک تابع پیوسته تک متغیره $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f\Big(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}\Big);\quad (x_i>0).$$

اثبات. فرض کنیم F در هر نقطه از قطر مفروض، پیوسته باشد و در معادله (۱) صدق کند. یعنی $F=F\circ(\mathcal{A},\mathcal{H})$. با استقرای ریاضی، نتیجه می گیریم که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $F=F\circ((\mathcal{A},\mathcal{H})^n)$، که منظور از $(\mathcal{A},\mathcal{H})^n$ تکرار n- ام $(\mathcal{A},\mathcal{H})$ است. با توجه به قضیه ۳.۳ و پیوستگی F روی قطر، برای هر $x_i>0$ داریم

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=\lim_{n\to\infty}F\circ((\mathcal{A},\mathcal{H})^n(x_1,x_2,\cdots,x_n))\\&=F(\mathcal{G}(x_1,x_2,\cdots,x_n),\mathcal{G}(x_1,x_2,\cdots,x_n))\\&=F\Big(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i},\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}\Big)\\&=f\Big(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}\Big)\end{aligned}$$

که در آن برای $t>0$، $f(t)=F(t,t,\cdots,t)$. عکس موضوع بدیهی است. □

قضیه ۱.۴، نشان می‌دهد که نگاشت‌های از نوع میانگین در حل انواع مختلف معادلات تابعی، به ویژه معادلاتی که در تحلیل ریاضی و کاربردهای آن به وجود می‌آیند، نقش اساسی دارند. به کمک [۱، قضیه۲]، [۱، قضیه۳] و مفاهیم گفته شده، قضیه مهم زیر را بدست می‌آوریم.

قضیه ۲.۴. فرض کنید تابع $F:(0,\infty)^n\to\mathbb{R}$ در قطر $\{(x,x):\ x>0\}$ پیوسته باشد. در این صورت تابع F در معادله تابعی زیر

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F\Big(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}\Big);\quad x_i>0, \tag{2}$$

صدق می کند، اگر و تنها اگر، یک تابع پیوسته تک متغیره $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(\mathcal{K}_{\mathcal{A},\mathcal{G}}(x_1,x_2,\cdots,x_n));\quad x_i>0.$$

اثبات. فرض کنید تابع $F:(0,\infty)^n\to\mathbb{R}$ در قطر $\{(x,x):\ x>0\}$ پیوسته باشد و در معادله تابعی (۲) صدق کند. دنباله تکرارهای نگاشت زیر را تعریف می‌کنیم

$$T(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\Big(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}\Big).$$

می‌دانیم که تکرارهای T که با $T^n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ نمایش داده می‌شوند، به طور یکنواخت بر روی زیرمجموعه‌های فشرده $(0,\infty)^n$ به نقطه

$$(\mathcal{K}_{\mathcal{A},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \mathcal{K}_{\mathcal{A},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

همگرا می‌شوند، که در آن $\mathcal{K}_{\mathcal{A},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ تابعی $n-$ متغیره می‌باشد. بنابراین، داریم

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\mathcal{K}_{\mathcal{A},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \mathcal{K}_{\mathcal{A},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

با استفاده از معادله تابعی، داریم

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(T^n(x_1, x_2, \cdots, x_n)); \quad n \in \mathbb{N}.$$

با گرفتن حد زمانی که $n \to \infty$ و استفاده از همگرایی یکنواخت $T^n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$، نتیجه می‌شود:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(\mathcal{K}_{\mathcal{A},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \mathcal{K}_{\mathcal{A},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)).$$

تابع $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(t) = F(t, t, \cdots, t); \quad t > 0.$$

لذا $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(\mathcal{K}_{\mathcal{A},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)).$$

تابع f پیوسته است زیرا F بر روی قطر $\{(x,x) : x > 0\}$ پیوسته است و $\mathcal{K}_{\mathcal{A},\mathcal{G}}$ یک تابع پیوسته از x_1، x_2، $\cdots$ و x_n است. نمایش $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(\mathcal{K}_{\mathcal{A},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n))$ منحصربه فرد است زیرا $\mathcal{K}_{\mathcal{A},\mathcal{G}}$ تنها میانگین پایا تحت نگاشت T است و $f(t)$ به طور کامل با مقادیر F بر روی قطر تعیین می‌شود. □

نتیجه ۳.۴. فرض کنید تابع $F : (0,\infty)^n \to \mathbb{R}$ در قطر $\{(x,x) : x > 0\}$ پیوسته باشد. در این صورت تابع F در معادله تابعی زیر

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F\Big(\frac{n\prod_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i}, \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}\Big); \quad x_i > 0, \tag{3}$$

صدق می کند، اگر و تنها اگر، یک تابع پیوسته تک متغیره مانند $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(\mathcal{K}_{\mathcal{H},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)); \quad x_i > 0.$$

اثبات. فرض کنید تابع $F : (0,\infty)^n \to \mathbb{R}$ در قطر $\{(x,x) : x > 0\}$ پیوسته باشد و در معادله تابعی (۳) صدق کند. دنباله تکرارهای نگاشت زیر را تعریف می‌کنیم

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Big(\frac{n\prod_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i}, \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}\Big).$$

می‌دانیم که تکرارهای T که با $T^n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ نمایش داده می‌شوند، به طور یکنواخت بر روی زیرمجموعه‌های فشرده $(0,\infty)^n$ به نقطه

$$(\mathcal{K}_{\mathcal{H},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \mathcal{K}_{\mathcal{H},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

همگرا می‌شوند، که در آن $\mathcal{K}_{\mathcal{H},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ تابعی n متغیره می‌باشد. بنابراین، داریم

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\mathcal{K}_{\mathcal{H},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \mathcal{K}_{\mathcal{H},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

با استفاده از معادله تابعی، داریم

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(T^n(x_1, x_2, \cdots, x_n)); \quad n \in \mathbb{N}.$$

با گرفتن حد زمانی که $n \to \infty$ و استفاده از همگرایی یکنواخت $T^n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ نتیجه می‌شود

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(\mathcal{K}_{\mathcal{H},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \mathcal{K}_{\mathcal{H},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)).$$

تابع $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(t)=F(t,t,\cdots,t);\quad t>0.$$

لذا $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(\mathcal{K}_{\mathcal{H},\mathcal{G}}(x_1,x_2,\cdots,x_n))$.
تابع f پیوسته است زیرا F بر روی قطر $\{(x,x):\ x>0\}$ پیوسته است و $\mathcal{K}_{\mathcal{H},\mathcal{G}}$ یک تابع پیوسته از x_1، x_2، $\cdots$ و x_n است. نمایش $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(\mathcal{K}_{\mathcal{H},\mathcal{G}}(x_1,x_2,\cdots,x_n))$ منحصربه فرد است زیرا $\mathcal{K}_{\mathcal{H},\mathcal{G}}$ تنها میانگین پایا تحت نگاشت T است و $f(t)$ به طور کامل با مقادیر F بر روی قطر تعیین می‌شود. $\square$

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، فرمهای صریح میانگین‌های پایا برای نگاشت‌های از نوع میانگین تولید شده توسط تعمیم‌های طبیعی میانگین‌های کلاسیک حسابی، هندسی و هارمونیک مورد بررسی و مطالعه قرار گرفتند. همچنین، به نقش نگاشت‌های از نوع میانگین در حل معادلات تابعی پرداخته شد. در حقیقت، دریافتیم که نگاشت‌های از نوع میانگین در حل انواع مختلف معادلات تابعی، به ویژه معادلاتی که در تحلیل ریاضی و کاربردهای آن به وجود می‌آیند، نقش اساسی دارند.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مراتب سپاس‌گزاری خود را از داور/داوران محترم به جهت ارایه پیشنهادات خیلی خوب در راستای ارتقای سطح کیفی مقاله اعلام می‌دارند.

مراجع

1. J. Matkowski, Explicit forms of invariant means: complementary results to Gauss $(\mathcal{A},\mathcal{G})$-theorem and some applications , Aequat. Math., (2023).
2. J. Matkowski, *Iterations of mean-type mappings and invariant means*, Ann. Math. Sil. 13 (1999), 211–226.
3. J. Matkowski, *Iterations of the mean-type mappings and uniqueness of invariant means*, Ann. Univ. Sci. BP. Sect. Comput. 41 (2013), 145–158.
4. J. Matkowski, *Invariance of a quasi-arithmetic mean with respect to a system of generalized Bajraktarevic means*, Appl. Math. Lett., 25(11) (2012), 1651–1655.
5. J. Matkowski, *Fixed points and iterations of mean-type mappings*, Cent. Eur. J. Math. 10 (2012), 2215–2228.