پنجمین همایش ملی و اولین همایش بین المللی محاسبات نرم علوم مهندسی در صنعت و جامعه
5th National and 1st International Conference on Soft Computing of Engineering Sciences in Industry and Society
۲۶ الی ۲۸ بهمن ماه ۱۴۰۴
دانشگاه ولایت

میانگین‌های پایا برای نگاشت‌های از نوع میانگین و همگرایی یکنواخت دنباله تکرارهای جفت میانگین

ابراهیم تمیمی[۱,*]

[۱]استادیار دانشگاه ولایت، ایرانشهر، *e.tamimi@velayat.ac.ir*

چکیده. در این مقاله، اشکال صریح میانگین‌های پایا برای نگاشت‌های از نوع میانگین تولید شده توسط میانگین‌های کلاسیک حسابی، هندسی و هارمونیک و تعمیم‌های طبیعی آن‌ها مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرد. نتایج مربوط به نگاشت‌های از نوع میانگین و تحلیل رفتار تکرارها نیز بررسی شده است. علاوه بر این، همگرایی به طور یکنواخت یک دنباله از تکرارهای جفت میانگین‌های مفروض بر زیرمجموعه‌های فشرده از اعداد حقیقی مطالعه شده است. همچنین، ارتباط نگاشت‌های از نوع میانگین با سیستم‌های دینامیکی و حل معادلات تابعی مورد توجه قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: میانگین حسابی، میانگین هندسی، میانگین هارمونیک، همگرایی، میانگین‌های پایا .
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 26E60, 39B12.

۱. مقدمه

میانگین‌ها به عنوان یکی از مفاهیم بنیادی در ریاضیات، کاربردهای گسترده‌ای در هندسه، تحلیل ریاضی و علوم محاسباتی دارند. به طور معمول، واژه میانگین به میانگین حسابی تعبیر می‌شود، اما انواع مختلفی از میانگین‌ها، مانند میانگین هندسی، میانگین هارمونیک و ... نیز وجود دارند که هر یک ویژگی‌ها و کاربردهای خاص خود را دارند. میانگین حسابی برای فضاهایی با هندسه اقلیدسی مناسب است، در حالی که میانگین هندسی برای فضاهایی با هندسه نااقلیدسی مناسب‌تر است. این ویژگی نشان می‌دهد که میانگین‌ها رابطه نزدیکی با نوع هندسه‌ای که در آن استفاده می‌شوند دارند، به عبارت دیگر، می‌توان گفت که هر میانگین با هندسه خاص خود در ارتباط است. نمونه‌هایی از میانگین‌های متداول عبارتند از:

الف) (میانگین حسابی) $\mathcal{A}(x,y)=\frac{x+y}{۲}$،

ب) (میانگین هندسی) $\mathcal{G}(x,y)=\sqrt{xy}$،

ج) (میانگین هارمونیک) $\mathcal{H}(x,y)=\frac{۲}{x^{-۱}+y^{-۱}}$.

برای میانگین‌های فوق، نامساوی زیر برقرار است:

$$\mathcal{H}\leq\mathcal{G}\leq\mathcal{A}$$

نظریه میانگین‌ها ارتباط نزدیکی با نظریه نامساوی ها و توابع محدب دارد. تحقیقات گذشته، به ویژه مقالات [۲،۳]، نشان داده‌اند که هر نگاشت از نوع میانگین، با فرض شرایط کلی، دارای یک میانگین پایای منحصربه فرد است. با این حال، یافتن شکل صریح این میانگین‌های پایا مسئله‌ای پیچیده و نابدیهی است که نیازمند روش‌های پیشرفته در نظریه ارگودیک و ریاضیات محاسباتی می باشد. علاوه بر این، ارتباط میانگین‌های پایا با نقاط ثابت و رفتار تکرارها در نگاشت‌های از نوع میانگین یکی از زمینه های مهم و جذاب تحقیقاتی است. مقالات مرتبط، مانند [۳–۵]، نشان می دهند که هر نگاشت از نوع میانگین، تحت شرایط معین، یک نقطه ثابت دارد و دنباله‌های تکراری آن به یک میانگین پایای مشخص همگرا می‌شوند. بررسی این رفتار همگرایی نه تنها از نظر تئوری جذاب است، بلکه در مسائل کاربردی، مانند تحلیل دینامیک سیستم‌ها، نقش حیاتی ایفا می کند.

در این مقاله، تمرکز اصلی ما بر یافتن اشکال صریح میانگین‌های پایا برای نگاشت های از نوع میانگین، تولید شده توسط میانگین‌های کلاسیک حسابی، هندسی و هارمونیک و تعمیم‌های طبیعی آن‌ها است. نتایج مربوط به نگاشت‌های از نوع

*ارائه دهنده

میانگین، بررسی اشکال صریح میانگین‌های پایا و تحلیل رفتار تکرارها را بررسی می‌کنیم. همچنین، رفتار تکرارهای این نگاشت‌ها، بررسی شده و ارتباط آن ها با سیستم‌های دینامیکی و حل معادلات تابعی مورد توجه قرار گرفته است.

۲. نتایج اصلی

میانگین‌ها در ریاضیات نقش اساسی دارند و از ابزارهای کلیدی در تحلیل داده‌ها و دینامیک سیستم‌ها محسوب می‌شوند. در این بخش، میانگین، نگاشت از نوع میانگین و خواص مهم میانگین ها مانند تقارن و پایایی بررسی خواهند شد. در واقع، نتایج مربوط به نگاشت‌های از نوع میانگین، بررسی اشکال صریح میانگین‌های پایا و تحلیل رفتار تکرارها را بررسی می‌کنیم و ارتباط آن ها با سیستم‌های دینامیکی و حل معادلات تابعی مورد توجه قرار می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. [۱] فرض کنیم $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه باشد و $k \in \mathbb{N}$ به‌طوری که $k \geq ۲$. در این صورت تابع $M : I^k \to \mathbb{R}$ را میانگین k- متغیره در I گوییم، هرگاه به ازای $x_۱, x_۲, \cdots, x_k \in I$،

$$\min\{x_۱, x_۲, \cdots, x_k\} \leq M(x_۱, x_۲, \cdots, x_k) \leq \max\{x_۱, x_۲, \cdots, x_k\}.$$

میانگین M را اکید گوییم، هرگاه برای تمام دنباله‌های غیرثابت $(x_۱, x_۲, \cdots, x_k) \in I^K$ نامساوی‌های فوق اکید باشد.

مثال ۲.۲. در زیر سه نمونه از میانگین‌های دومتغیره بیان شده است.

الف) (میانگین حسابی) $\mathcal{A}(x, y) = \dfrac{x+y}{۲}$،

ب) (میانگین هندسی) $\mathcal{G}(x, y) = \sqrt{xy}$،

ج) (میانگین هارمونیک) $\mathcal{H}(x, y) = \dfrac{۲}{x^{-۱} + y^{-۱}}$ که در آن $x, y > ۰$.

در ادامه مطالب را برای میانگین‌های مذکور با k متغیر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۳.۲. جایگشت‌های n شی متمایز برابر با $n!$ می باشد. جایگشت‌های r تایی از n شی متمایز را با $P(n, r)$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$n! = n \times (n-۱) \times (n-۲) \times \cdots \times ۲ \times ۱,$$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

تعریف ۴.۲. میانگین M را متقارن گوییم، هرگاه برای هر جایگشت σ از مجموعه $\{۱, ۲, \cdots, k\}$ و هر $x_۱, x_۲, \cdots, x_k \in I$،

$$M(x_{\sigma(۱)}, x_{\sigma(۲)}, \cdots, x_{\sigma(k)}) = M(x_۱, x_۲, \cdots, x_k).$$

تعریف ۵.۲. فرض کنیم $I = (۰, \infty)$ در این صورت میانگین k- متغیره M در $I = (۰, \infty)^k$ را همگن گوییم، هرگاه

$$M(tx_۱, tx_۲, \cdots, tx_k) = tM(x_۱, x_۲, \cdots, x_k), \qquad t, x_۱, x_۲, \cdots, x_k > ۰.$$

ملاحظه ۶.۲. میانگین $M : I^k \to \mathbb{R}$ را انعکاسی(بازتابی) گوییم هرگاه برای هر $x \in I$، $M(\overbrace{x, x, \cdots, x}^{k}) = x$. اگر تابع M انعکاسی و (به طور اکید) صعودی باشد، آن گاه M یک میانگین (اکید) در I است.

تعریف ۷.۲. فرض کنیم $M_۱, M_۲, \cdots, M_k : I^k \to I$ میانگین‌های k- متغیره باشند. در این صورت نگاشت $\mathcal{M} : I^k \to I^k$ را که $\mathcal{M} = (M_۱, M_۲, \cdots, M_k)$، نگاشت از نوع میانگین می‌گوییم.

تعریف ۸.۲. [۱] فرض کنیم $\mathcal{M} : I^k \to I^k$ نگاشت از نوع میانگین باشد که $\mathcal{M} = (M_۱, M_۲, \cdots, M_k)$. در این صورت میانگین $K : I^k \to I$ را M- پایا (یا پایا نسبت به نگاشت از نوع میانگین $\mathcal{M} = (M_۱, M_۲, \cdots, M_k)$) گوییم، هرگاه

$$K \circ (M_۱, M_۲, \cdots, M_k) = K.$$

به وضوح، اگر K، $\mathcal{M}$- پایا باشد، آن گاه

$$\min\{M_1, M_2, \cdots, M_k\} \leq K \leq \max\{M_1, M_2, \cdots M_k\}.$$

ملاحظه ۹.۲. توجه کنیم که میانگین $K : I^k \to I$، $\mathcal{M}$- پایا است اگر و تنها اگر نگاشت از نوع میانگین $\mathcal{K} : I^k \to I^k$، که با $\mathcal{K} = (K, K, \cdots, K)$ تعریف می شود نیز $\mathcal{M}$- پایا باشد، یعنی اگر و تنها $K = K \circ \mathcal{M}$.

لم ۱۰.۲. [۳] فرض کنیم $M_1, \cdots, M_k : I^k \to I$ میانگین های پیوسته و اکید در $I \subseteq \mathbb{R}$ باشند. در این صورت

الف) یک میانگین $(M_1, \cdots, M_k)$- پایای منحصربه فرد $K : I^k \to I$ وجود دارد.

ب) K پیوسته است و

$$\min\{M_1, \cdots, M_k\} \leq K \leq \max\{M_1, \cdots, M_k\}.$$

ج) دنباله $((M_1, \cdots, M_k)^n : n \in \mathbb{N})$ از تکرارهای نگاشت از نوع میانگین $(M_1, \cdots, M_k)$ به طور یکنواخت بر زیرمجموعه های فشرده همگرا می شود و

$$\lim_{n\to\infty} (M_1, \cdots, M_k)^n = (K, \cdots, K).$$

د) اگر $M_1, \cdots, M_k$ متقارن باشند، آن گاه K نیز متقارن است.

ه) اگر $I = (0, \infty)$ و $M_1, \cdots, M_k$ همگن باشند، آن گاه K نیز همگن است.

قضیه ۱۱.۲. فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{H}$ به ترتیب میانگین حسابی و هارمونیک باشد. نگاشت از نوع میانگین $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ را در نظر می گیریم. در این صورت میانگین $K : (0, \infty)^n \to (0, \infty)$، $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$- پایا است، یعنی $K \circ (\mathcal{A}, \mathcal{H}) = K$ اگر و تنها اگر $K = \mathcal{G}$. علاوه بر این، دنباله $((\mathcal{A}, \mathcal{H})^n : n \in \mathbb{N})$ از تکرارهای $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ به طور یکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشرده $(0, \infty)^n$ همگرا می‌شود و

$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{A}, \mathcal{H})^n = (\mathcal{G}, \mathcal{G}).$$

اثبات. برای هر $x, y > 0$ داریم:

$$\mathcal{G} \circ (\mathcal{A}, \mathcal{H})(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \times \frac{n x_1 x_2 \ldots x_n}{\sum_{i=1}^n x_i}} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \mathcal{G}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

بنابراین میانگین هندسی $\mathcal{G}$، $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$- پایا است. از آن جا که میانگین‌های $\mathcal{A}$ و $\mathcal{H}$ پیوسته و اکید هستند، با توجه به لم ۱۰.۲ برای $k = 2$، $M_1 = \mathcal{A}$ و $M_2 = \mathcal{H}$ منحصربه فردی میانگین پایای $\mathcal{G}$ و همگرایی آن حاصل می‌شوند. □

لم ۱۲.۲. با توجه به فرضیات قضیه ۱۱.۲، برای $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$، دنباله

$$((\mathcal{A}, \mathcal{H})^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) : n \in \mathbb{N})$$

به سرعت به $\mathcal{G}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ همگرا می‌شود.

اثبات. فرض کنیم به ازای $i = 1, 2, \cdots, n$، و $x_i > 0$ داریم

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \mathcal{H}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \frac{2}{\sum_{i=1}^n x_i^{-1}}. \quad (1)$$

همچنین برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\mathcal{H} \circ ((\mathcal{A}, \mathcal{H})^n) \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{A} \circ ((\mathcal{A}, \mathcal{H})^n) \quad (2)$$

برقرار است. روابط (۱) و (۲) نشان می‌دهند که دنباله $((\mathcal{A}, \mathcal{H})^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) : n \in \mathbb{N})$ به سرعت به $\mathcal{G} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ همگرا می‌شود. □

ملاحظه ۱۳.۲. تساوی پایای $\mathcal{G} \circ (\mathcal{A}, \mathcal{H}) = \mathcal{G}$ با تناسب فیثاغورثی زیر معادل است:

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{G}} = \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$$

نتیجه ۱۴.۲. با توجه به فرضیات قضیه ۱۱.۲ و لم ۱۲.۲ برای $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$، دنباله

$$((\mathcal{A}, \mathcal{G})^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \ n \in \mathbb{N})$$

به سرعت به $(K_{\mathcal{A},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n), K_{\mathcal{A},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n))$ همگرا خواهد بود.

اثبات. با توجه به مطالب گفته شده قبلی داریم

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \mathcal{G}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

و برای $n \in \mathbb{N}$، نامساوی های

$$\mathcal{G} \circ (\mathcal{A}, \mathcal{G})^n \leq K_{\mathcal{A},\mathcal{G}} \leq \mathcal{A} \circ (\mathcal{A}, \mathcal{G})^n$$

برای $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$، همگرایی سریع دنباله $((\mathcal{A}, \mathcal{G})^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \ n \in \mathbb{N})$ را به

$$(K_{\mathcal{A},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n), K_{\mathcal{A},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

نتیجه می‌دهد. □

نتیجه ۱۵.۲. فرض کنید $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$. نشان می‌دهند که دنباله

$$((\mathcal{H}, \mathcal{G})^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \ n \in \mathbb{N})$$

به سرعت به $(K_{\mathcal{H},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n), K_{\mathcal{H},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n))$ همگرا می‌شود.

اثبات. مشابه اثبات لم ۱۲.۲، داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \mathcal{H}(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} - \frac{n x_1 x_2 \cdots x_n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \\ &= \frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \sum_{i=1}^{n} x_i - n x_1 x_2 \cdots x_n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\end{aligned}$$

و برای $n \in \mathbb{N}$ نامساوی‌های

$$\mathcal{H} \circ ((\mathcal{H}, \mathcal{G})^n) \leq K_{\mathcal{H},\mathcal{G}} \leq \mathcal{G} \circ ((\mathcal{H}, \mathcal{G})^n),$$

برای $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$، نشان می‌دهند که دنباله

$$((\mathcal{H}, \mathcal{G})^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \ n \in \mathbb{N})$$

به سرعت به $(K_{\mathcal{H},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n), K_{\mathcal{H},\mathcal{G}}(x_1, x_2, \cdots, x_n))$ همگرا می‌شود. □

اینک، نتیجه زیر از لم ۱۰.۲ و نتایج اخیر بدست می آید.

نتیجه ۱۶.۲. با توجه به بند (د) لم ۱۰.۲ و تقارن میانگین‌های $\mathcal{H}$ و $\mathcal{G}$ نتیجه‌ای مشابه (با $K = K_{\mathcal{H},\mathcal{G}} = K_{\mathcal{G},\mathcal{H}}$) برای نگاشت از نوع میانگین $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ نیز برقرار است.

در این قسمت از مقاله به نقش نگاشت‌های از نوع میانگین در حل معادلات تابعی در قالب قضیه‌ای مهم، می‌پردازیم.

قضیه ۱۷.۲. فرض کنید تابع $F : (0, \infty)^n \to \mathbb{R}$ در هر نقطه از قطر $\{(x, x) : x > 0\}$ پیوسته باشد. آنگاه تابع داده شده در معادله تابعی زیر صدق می‌کند:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \frac{n x_i x_2 \cdots x_n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right), \ (x_i > 0) \qquad (۳)$$

اگر و تنها اگر یک تابع پیوسته تک متغیره $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(\sqrt[n]{x_i x_2 \cdots x_n}); \ (x_i > 0).$$

اثبات. فرض کنیم F در هر نقطه از قطر پیوسته باشد و در معادله (۳) صدق کند. یعنی $F = F \circ (\mathcal{A}, \mathcal{H})$. با استقرای ریاضی، نتیجه می گیریم که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $F = F \circ ((\mathcal{A}, \mathcal{H})^n)$. که منظور از $(\mathcal{A}, \mathcal{H})^n$ تکرار n- ام $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ است. با توجه به قضیه ۱۱.۲ و پیوستگی F روی قطر، برای هر $x_i > 0$ داریم:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \lim_{n\to\infty} F \circ ((\mathcal{A}, \mathcal{H})^n(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \\ &= F(\mathcal{G}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \mathcal{G}(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \\ &= F(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}, \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}) \\ &= f(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}) \end{aligned}$$

که در آن برای $t > 0$، $f(t) = F(t, t, \cdots, t)$. عکس موضوع ساده است. □

قضیه ۱۷.۲، نشان می دهد که نگاشت های از نوع میانگین در حل انواع مختلف معادلات تابعی، به ویژه معادلاتی که در تحلیل ریاضی و کاربردهای آن به وجود می آیند، نقش اساسی دارند.

۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله نتایج مربوط به نگاشت‌های از نوع میانگین، اشکال صریح میانگین‌های پایا و تحلیل رفتار تکرارها مورد بررسی قرار گرفت. همچنین، ارتباط آن ها با سیستم‌های دینامیکی و حل معادلات تابعی مطالعه گردید.

تشکر و قدردانی

مراتب سپاس‌گزاری خود را از داور/داوران محترم به جهت پیشنهادات خیلی خوب در راستای ارتقای سطح کیفی مقاله اعلام می‌دارم.

مراجع

1. J. Matkowski, Explicit forms of invariant means: complementary results to Gauss $(\mathcal{A}, \mathcal{G})$-theorem and some applications , Aequat. Math., (2023).
2. J. Matkowski, *Iterations of mean-type mappings and invariant means*, Ann. Math. Sil. 13 (1999), 211–226.
3. J. Matkowski, *Iterations of the mean-type mappings and uniqueness of invariant means*, Ann. Univ. Sci. BP. Sect. Comput. 41 (2013), 145–158.
4. J. Matkowski, *Invariance of a quasi-arithmetic mean with respect to a system of generalized Bajraktarevic means*, Appl. Math. Lett., 25(11) (2012), 1651–1655.
5. J. Matkowski, *Fixed points and iterations of mean-type mappings*, Cent. Eur. J. Math. 10 (2012), 2215–2228.