

خواص موروثی A^{**} - دوتصویری و φ - A^{**} - دوتصویری جبرهای باناخ

ابراهیم تمیمی^۱

^۱ گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ولایت

چکیده

در این مقاله، خواص موروثی A^{**} - دوتصویری جبرهای باناخ که به حاصل ضرب تانسوری تصویری آنها منتقل می‌شود را بررسی می‌کنیم. همچنین، خواص موروثی φ - میانگین‌پذیری چپ (راست) و φ - میانگین‌پذیری داخلی آنها را مطالعه می‌کنیم و مثالهایی برای تایید نتایج بدست آمده، ارائه می‌دهیم. در ادامه، نتایج موروثی دیگری در زمینه نامبرده مورد بررسی قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: $\varphi \otimes \psi$ - $(A \hat{\otimes} B)^{**}$ - دوتصویر، $\varphi \otimes \psi$ - میانگین‌پذیر، میانگین‌پذیری داخلی، میانگین‌پذیری چپ، ضرب تانسوری تصویری

۱ مقدمه

مفهوم میانگین‌پذیری (برای گروه‌های گسسته) توسط ج. فون نویمان در سال ۱۹۲۹ آغاز شد که در آن، یک گروه گسسته میانگین‌پذیر است هرگاه یک اندازه احتمال جمعی پایایی چپ موجود باشد. پس از آن م. م. دی این مفهوم را به طور رسمی برای تمام گروه‌های فشرده موضعی معرفی کرد. بعدها این مفهوم توسط ب. ا. جانسون در سال ۱۹۷۲ برای جبرهای باناخ توسعه داده شد و از آن پس به عنوان یک موضوع تحقیقاتی جالب، مورد توجه قرار گرفت [۸]. در سال ۲۰۰۶ قهرمانی و همکاران مفهوم ضعیف‌تر میانگین‌پذیری تقریبی را معرفی کردند و توانستند بسیاری از نتایج مربوط به میانگین‌پذیری را تعمیم دهند. در سال ۲۰۰۸ کانووت، لائو و پیم مفهوم φ - میانگین‌پذیری جبرهای باناخ را معرفی کردند [۱۱] که این تعریف با الهام از تعریف میانگین‌پذیری چپ F - جبرها که قبلاً توسط لائو [۱۲] انجام شده بود، شکل گرفت. این مفهوم مورد توجه بسیاری قرار گرفت و ثابت شد که φ - میانگین‌پذیری رابطه نزدیکی با وجود یک تقریبی کران‌دار برای $\ker \varphi$ دارد. مفهوم φ - میانگین‌پذیری در [۱۰] و به طور مستقل در [۱۳] معرفی شد. اخیراً، نسخه‌های دیگر این مفهوم توسط تمیمی و غفاری نیز مورد بررسی قرار گرفت [۱۱، ۱۲]. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد.

¹e.tamimi@velayat.ac.ir

برای یک تابع خطی ضربی $\varphi \in A^*$ ، A را φ - میانگین پذیر چپ می نامیم هرگاه A دارای یک φ - میانگین چپ باشد. یعنی، یک تابع خطی کران دار m روی A^* وجود داشته باشد که برای هر $a \in A$ و $f \in A^*$ ، در شرط $m(\varphi) = 1$ و $m(f.a) = \varphi(a)m(f)$ صدق کند. جبرهای باناخ جابجایی، جبرهای باناخ مشخصه میانگین پذیر و جبرهای باناخ دارای یک تقریبی کران دار، مثال هایی از جبرهای باناخ φ - میانگین پذیر داخلی هستند.

هلمسکی در دهه ۱۹۸۰ جبرهای باناخ دوتصویر را تعریف کرد که تا به اکنون به عنوان یکی از ابزارهای مهم در همانستگی جبرهای باناخ شناخته می شود [۲]. فرض کنید به ازای هر $a, b \in A$ ، $\pi_A: A \hat{\otimes} A \rightarrow A$ یک نگاشت ضربی باشد یعنی $\pi_A(a \otimes b) = ab$. در این صورت جبر باناخ A دوتصویر نامیده می شود هرگاه همریختی A - دومدولی پیوسته $A \hat{\otimes} A \rightarrow A: \rho$ وجود داشته باشد به طوری که $\pi_A \circ \rho = id_A$. پس از آن مفاهیم دیگری که قوی تر یا ضعیف تر از این مفهوم بودند نیز تعریف و مورد بررسی قرار گرفتند. به عنوان مثال، ژانگ در سال ۱۹۹۹ جبرهای باناخ دوتصویر تقریبی را معرفی کرد [۲۳]. سهامی و پورعباس در سال ۲۰۱۴ با الهام از تعریف φ - میانگین پذیری مفهوم جبرهای باناخ φ - دوتصویر را معرفی کردند و خواص آن را مورد بررسی قرار دادند [۲۲]. پس از آن نیز تحقیقات گسترده ای روی این مفهوم برای بسیاری از جبرها از جمله جبر گروهی، جبر اندازه، جبر نیم گروهی و جبرهای لیپشیتزی صورت گرفت. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و φ یک تابع خطی ضربی کران دار ناصفر روی A باشد در این صورت φ - دوتصویر نامیده می شود هرگاه همریختی A - مدولی پیوسته $A \hat{\otimes} A \rightarrow A: \rho$ موجود باشد به طوری که $\varphi \circ \pi_A \circ \rho(a) = \varphi(a)$. نویسندگان در [۱۹] مفهوم جبرهای باناخ A^{**} - دوتصویر را معرفی کردند و رابطه آنها را با برخی از مفاهیم همانستگی مطالعه کردند.

در این مقاله، به بررسی خواص موروثی A^{**} - دوتصویری جبر باناخ $A = A \hat{\otimes} B$ می پردازیم. همچنین، رابطه بین این مفهوم با مفهوم $\varphi \otimes \psi$ - میانگین پذیری داخلی و $\varphi \otimes \psi$ - میانگین پذیری چپ را به دست می آوریم. در واقع، ارتباط بین $(A \hat{\otimes} B)^{**}$ - دوتصویری و $\varphi \otimes \psi$ - میانگین پذیری را بررسی می کنیم. جبرهای باناخ $\varphi \otimes \psi$ - $(A \hat{\otimes} B)^{**}$ - دوتصویر را بررسی کرده و ارتباط آنها را با برخی دیگر از مفاهیم همانستگی به دست می آوریم.

۲ نتایج اصلی

فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک A - دومدول باناخ باشد. در این صورت فضای دوگان X یعنی X^* با اعمال مدولی زیر یک A - دومدول باناخ است:

$$(a.f)(x) = f(x.a), \quad (f.a)(x) = f(a.x); \quad (a \in A, x \in X, f \in X^*).$$

اگر $\widehat{A \otimes A}$ فضای حاصل ضرب تانسوری تصویری باشد در این صورت $\widehat{A \otimes A}$ یک A -دومدول باناخ با اعمال مدولی زیر است:

$$a.(b \otimes c) = ab \otimes c, \quad (a \otimes b).c = a \otimes bc; \quad (a, b, c \in A).$$

بنابراین $(\widehat{A \otimes A})^*$ با اعمال مدولی زیر یک A -دومدول باناخ است:

$$(a.f)(b \otimes c) = f(b \otimes ca), \quad (f.a)(b \otimes c) = f(ab \otimes c); \quad (a, b, c \in A, f \in (\widehat{A \otimes A})^*).$$

به طور مشابه می توان $(\widehat{A \otimes A})^{**}$ را به عنوان یک A -دومدول باناخ در نظر گرفت. به یک تابع خطی ضربی ناصفر روی جبر باناخ A یک مشخصه گفته می شود و مجموعه تمام مشخصه های روی A را با نماد $\Delta(A)$ نمایش می دهیم. در سرتاسر این مقاله، $\mathcal{K}_A : A \rightarrow A^{**}$ نشاندهی طبیعی و $\pi_A : \widehat{A \otimes A} \rightarrow A$ نگاشت ضربی باشد. آرنز در سال ۱۹۵۱ دو ضرب روی دوگان دوم یک جبر باناخ تعریف کرد تا بتواند آن را تبدیل به یک جبر باناخ کند. در واقع این ضرب ها توسیع ضرب معمولی روی جبر هستند. به این ضرب ها ضرب آرنز اول و دوم گفته می شود که به ترتیب با نمادهای $\square$ و $\diamond$ نمایش داده می شوند و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\langle F \square G, f \rangle = \langle F, G.f \rangle, \quad \langle F \diamond G, f \rangle = \langle G, f.F \rangle$$

و

$$\langle G.f, a \rangle = \langle G, f.a \rangle, \quad \langle f.F, a \rangle = \langle F, a.f \rangle$$

و

$$\langle f.a, b \rangle = \langle f, ab \rangle, \quad \langle a.f, b \rangle = \langle f, ba \rangle,$$

که در آن $F, G \in A^{**}$ ، $f \in A^*$ و $a, b \in A$. دقت شود که اگر A یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(A)$ آنگاه توسیع یکتایی از φ به A^{**} موجود است که آن را با $\tilde{\varphi}$ نمایش می دهیم. در واقع برای هر $F \in A^{**}$ قرار می دهیم $\tilde{\varphi}(F) = F(\varphi)$. ابتدا تعریف جبرهای باناخ A^{**} -دوتصویر را ارائه می دهیم. برای جزئیات بیشتر به [۱۹] مراجعه شود.

تعریف ۱.۲. جبر باناخ A را A^{**} -دوتصویر گوئیم هر گاه همریختی پیوسته A -دومدولی $\rho : A \rightarrow A^{**} \widehat{\otimes} A^{**}$ موجود باشد به طوریکه به ازای هر $a \in A$

$$\pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \mathcal{K}_A(a) \quad (1)$$

که در آن $\pi_{A^{**}} : A^{**} \widehat{\otimes} A^{**} \rightarrow A^{**}$ عملگر ضربی با ضابطه $\pi_{A^{**}}(F \otimes G) = F \square G$ است.

مثالهای زیر نشان می دهند که جبرهای باناخ میانگین پذیر نقش عمده ای در مبحث دوتصویری ایفا می کنند، همچنین جبرهای باناخ A^{**} -دوتصویر نیستند بسیار حائز اهمیت اند.

مثال ۱.۲. الف) فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. اگر A^2 در A چگال نباشد آنگاه A نمی تواند یک جبر باناخ A^{**} - دوتصویر باشد.

ب) فرض کنید G یک گروه فشرده موضعی باشد. بنا بر قضیه جانسون و مفاهیم بالا اگر G میانگین پذیر نباشد آنگاه جبر گروهی $L^1(G)$ ، $L^1(G)^{**}$ - دوتصویر نمی باشد.

ج) فرض کنید A یک جبر باناخ با یک تقریبی کران دار باشد. اگر A میانگین پذیر نباشد آنگاه A^{**} ، A - دوتصویر نخواهد بود.

د) فرض کنید A یک جبر باناخ با یک تقریبی کران دار باشد اما شبه میانگین پذیر نباشد در این صورت A^{**} ، A - دوتصویر نخواهد بود.

در قضیه زیر به بررسی خاصیت دوتصویر بودن دو جبر باناخ مفروض و موروثی بودن این خاصیت برای حاصل ضرب تانسوری تصویری آنها می پردازیم. در واقع نشان می دهیم خاصیت مذکور تحت شرایطی، به حاصل ضرب تانسوری تصویری جبرهای باناخ منتقل می شود.

قضیه ۱.۲. فرض کنید A یک جبر باناخ A^{**} - دو تصویر و B یک جبر باناخ B^{**} - دو تصویر باشند. اگر $A \hat{\otimes} B$ یک جبر باناخ باشد، آنگاه $A \hat{\otimes} B$ ، $(A \hat{\otimes} B)^{**}$ - دوتصویر است.

اثبات. تعریف می کنیم

$$\lambda : A^{**} \hat{\otimes} B^{**} \rightarrow (A \hat{\otimes} B)^{**}, \quad \lambda(K_A(a) \otimes K_B(b)) = K_{A \hat{\otimes} B}(a \otimes b)$$

و قرار می دهیم $K_A \otimes K_B : A \hat{\otimes} B \rightarrow A^{**} \hat{\otimes} B^{**}$ ، که در آن $K_A \otimes K_B(a \otimes b) = K_A(a) \otimes K_B(b)$ ادعا می کنیم

$$\rho_{A \hat{\otimes} B} (:= \rho_A \otimes \rho_B) = \pi_{(A \hat{\otimes} B)^{**}}^{-1} \circ \lambda \circ (K_A \otimes K_B)$$

در رابطه ی

$$\pi_{(A \hat{\otimes} B)^{**}} \circ \rho_{A \hat{\otimes} B}(a \otimes b) = K_{A \hat{\otimes} B}(a \otimes b)$$

صدق می کند، که در آن $\pi_{(A \hat{\otimes} B)^{**}} : (A \hat{\otimes} B)^{**} \hat{\otimes} (A \hat{\otimes} B)^{**} \rightarrow (A \hat{\otimes} B)^{**}$ عملگر ضربی با ضابطه ی $\pi_{(A \hat{\otimes} B)^{**}}(F \otimes G) = F \square G$ است. $\square$

مثال زیر در جهت تایید قضیه ۱.۳ می باشد.

مثال ۲.۲. فرض کنید

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \cdot & a & b \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}; \cdot \neq a, \cdot \neq b \in \mathbb{C} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a' & \cdot & \cdot \\ b' & \cdot & \cdot \end{pmatrix}; \cdot \neq a', \cdot \neq b' \in \mathbb{C} \right\}.$$

در این صورت با جمع و ضرب اسکالر و ضرب معمولی ماتریسی و نرمهای زیر، A و B دو جبر باناخ هستند

$$\left\| \begin{pmatrix} \cdot & a & b \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \right\| = |a| + |b|, \quad (a, b \in \mathbb{C}),$$

$$\left\| \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a' & \cdot & \cdot \\ b' & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \right\| = |a'| + |b'|, \quad (a', b' \in \mathbb{C}).$$

همچنین، $A \hat{\otimes} B$ با ضرب

$$(\alpha \otimes \beta) \cdot (\gamma \otimes \delta) = \alpha\gamma \otimes \beta\delta, \quad (\alpha, \gamma \in A, \beta, \delta \in B) \quad (۲)$$

یک جبر باناخ است. داریم

$$\begin{aligned} (A \hat{\otimes} B)^\gamma &= (A \hat{\otimes} B) \cdot (A \hat{\otimes} B) \\ &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\ &\neq A \hat{\otimes} B. \end{aligned}$$

در نتیجه $A \hat{\otimes} B$ ، $(A \hat{\otimes} B)^{**}$ - دوتصویر نمی باشد. اینک نشان دهیم یا A ، A^{**} - دوتصویر نمی باشد یا B ، B^{**} - دوتصویر نمی باشند. برای این منظور داریم

$$A^\gamma = \begin{pmatrix} \cdot & a & b \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdot & a & b \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \neq A.$$

همچنین،

$$B^\gamma \neq B.$$

بنا بر مثال ۱.۲، نتیجه مطلوب بدست می آید.

تعریف ۲.۲. فرض کنید A یک جبر باناخ و $\varphi \in \Delta(A)$. گوییم A ، φ - A^{**} - دوتصویر است هر گاه همریختی پیوسته A - دومدولی $A^{**} \hat{\otimes} A^{**}$ $\rho : A \rightarrow A^{**} \hat{\otimes} A^{**}$ موجود باشد به طوریکه به ازای هر $a \in A$

$$\tilde{\varphi} \circ \pi_{A^{**}} \circ \rho(a) = \varphi(a).$$

به وضوح مفهوم φ - A^{**} - دوتصویری A ضعیف تر از A^{**} - دوتصویری A می باشد و از آن نتیجه می شود. در ادامه با ذکر مثالی نشان می دهیم که عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست.

گزاره ۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ ، B و $\mathcal{A} \hat{\otimes} B$ جبرهای باناخ، $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ و $\psi \in \Delta(B)$. فرض کنید $\mathcal{A}$ ، φ - $\mathcal{A}^{**}$ - دوتصویر و B ، ψ - B^{**} - دوتصویر باشند. آن گاه $\mathcal{A} \hat{\otimes} B$ ، $\varphi \otimes \psi$ - $(\mathcal{A} \hat{\otimes} B)^{**}$ - دوتصویر است.

اثبات. فرض کنید $\pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} B)^{**}} : (\mathcal{A} \hat{\otimes} B)^{**} \hat{\otimes} (\mathcal{A} \hat{\otimes} B)^{**} \rightarrow (\mathcal{A} \hat{\otimes} B)^{**}$. نگاشت ضربی باشد. نشان می‌دهیم یک همریختی پیوسته $\mathcal{A} \hat{\otimes} B$ - مدولی مانند

$$\rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} B} : \mathcal{A} \hat{\otimes} B \rightarrow (\mathcal{A} \hat{\otimes} B)^{**} \hat{\otimes} (\mathcal{A} \hat{\otimes} B)^{**} \quad (۳)$$

وجود دارد به طوریکه $\widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ \pi_{(\mathcal{A} \hat{\otimes} B)^{**}} \circ \rho_{\mathcal{A} \hat{\otimes} B}(a \otimes b) = \varphi \otimes \psi(a \otimes b)$ بنا بر قضیه ۱.۳ و فرضیات قضیه، فرض کنید

$$\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{A}^{**}, \quad \rho_B : B \rightarrow B^{**} \hat{\otimes} B^{**}$$

به ترتیب همریختی‌های پیوسته $\mathcal{A}$ - مدولی و B - مدولی باشند یعنی برای هر $a, a' \in \mathcal{A}$ و $b, b' \in B$

$$\rho_{\mathcal{A}}(aa') = \rho_{\mathcal{A}}(a).a' = a.\rho_{\mathcal{A}}(a'), \quad \rho_B(bb') = \rho_B(b).b' = b.\rho_B(b') \quad (۴)$$

که به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ و $b \in B$ ، در شرایط زیر صدق کنند،

$$\tilde{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}^{**}} \circ \rho_{\mathcal{A}}(a) = \varphi(a), \quad \tilde{\psi} \circ \pi_{B^{**}} \circ \rho_B(b) = \psi(b),$$

که در آن

$$\pi_{\mathcal{A}^{**}} : \mathcal{A}^{**} \hat{\otimes} \mathcal{A}^{**} \rightarrow \mathcal{A}^{**}; \quad F_{\mathcal{A}} \otimes G_{\mathcal{A}} \mapsto F_{\mathcal{A}} \square G_{\mathcal{A}}$$

و

$$\pi_{B^{**}} : B^{**} \hat{\otimes} B^{**} \rightarrow B^{**}; \quad F_B \otimes G_B \mapsto F_B \square G_B.$$

همچنین فرض کنید

$$\rho_{\mathcal{A}} \otimes \rho_B(a \otimes b) = \rho_{\mathcal{A}}(a) \otimes \rho_B(b), \quad (a \in \mathcal{A}, b \in B).$$

□

بتا بر [۲، لم ۱.۷]، $\varphi \otimes \psi$ - $(\mathcal{A} \hat{\otimes} B)^{**}$ - دوتصویری $\mathcal{A} \hat{\otimes} B$ ، ثابت می‌شود.

تعریف ۳.۲. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. گوئیم $\mathcal{A}$ ، φ - میانگین‌پذیر چپ است هرگاه تور کران‌دار (m_{α}) در $\mathcal{A}$ موجود باشد به طوری که برای هر $a \in \mathcal{A}$

$$am_{\alpha} - \varphi(a)m_{\alpha} \rightarrow 0, \quad \varphi(m_{\alpha}) \rightarrow 1.$$

تور (e_{α}) را یک‌تقریبی چپ جبر باناخ $\mathcal{A}$ گوئیم هرگاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ ، $e_{\alpha}a \rightarrow a$. یک‌تقریبی (e_{α}) را کران‌دار گوئیم هرگاه $K > 0$ وجود داشته باشد که $\|e_{\alpha}\| \leq K$. به طور مشابه یک‌تقریبی راست کران‌دار نیز تعریف می‌شود. جبر باناخ $\mathcal{A}$ دارای یک‌تقریبی کران‌دار است هرگاه دارای یک‌تقریبی چپ کران‌دار و راست کران‌دار باشد.

تذکر ۱.۰۲. بر اساس [۱۹، قضیه ۳.۳]، اگر A یک جبر باناخ با یکۀ تقریبی چپ (راست)، $\varphi \in \Delta(A)$ و A^{**} - دوتصویر باشد، آنگاه A ، φ - میانگین پذیر چپ (راست) است.

قضیه ۲.۰۲. فرض کنید A و B دو جبر باناخ با یکۀ های تقریبی چپ (راست) باشند، $\varphi \in \Delta(A)$ و $\psi \in \Delta(B)$. اگر A^{**} - دوتصویر و B^{**} - دوتصویر و $A \hat{\otimes} B$ یک جبر باناخ باشد. آنگاه $A \hat{\otimes} B$ ، $\varphi \otimes \psi$ - میانگین پذیر چپ (راست) است.

اثبات. از آنجا که A ، A^{**} - دوتصویر و B ، B^{**} - دوتصویر می باشند، طبق تعریف، عملگرهای $\rho_A : A \rightarrow A^{**} \hat{\otimes} A^{**}$ و $\rho_B : B \rightarrow B^{**} \hat{\otimes} B^{**}$ و همچنین نشانده های طبیعی

$$\mathcal{K}_A : A \rightarrow A^{**}, \quad \mathcal{K}_B : B \rightarrow B^{**}$$

وجود دارند به طوریکه برای هر $a, b \in A$ و $a', b' \in B$ خواهیم داشت

$$\pi_{A^{**}} \circ \rho_A(a) = \mathcal{K}_A(a), \quad \rho_A(ab) = \rho_A(a).b = a.\rho_A(b)$$

و

$$\pi_{B^{**}} \circ \rho_B(b') = \mathcal{K}_B(b'), \quad \rho_B(a'b') = \rho_B(a').b' = a'.\rho_B(b').$$

طبق [۲، لم ۱.۷]، نگاشت های $\Phi : A^{**} \hat{\otimes} A^{**} \rightarrow (A \hat{\otimes} A)^{**}$ و $\Psi : B^{**} \hat{\otimes} B^{**} \rightarrow (B \hat{\otimes} B)^{**}$ وجود دارند به طوری که برای هر $a, b \in A$ ، $a', b' \in B$ ، $n \in A^{**} \hat{\otimes} A^{**}$ و $n' \in B^{**} \hat{\otimes} B^{**}$ در شرایط [۲، لم ۱.۷]، صدق کنند. فرض کنید $\{m_\alpha\} \subseteq A$ و $\{n_\beta\} \subseteq B$ به ترتیب یکۀ های تقریبی چپ جبر های باناخ A و B باشند. نگاشت های

$$\rho_{A \hat{\otimes} B} : A \hat{\otimes} B \rightarrow (A^{**} \hat{\otimes} A^{**}) \hat{\otimes} (B^{**} \hat{\otimes} B^{**})$$

و

$$\lambda : (A \hat{\otimes} A)^{**} \hat{\otimes} (B \hat{\otimes} B)^{**} \rightarrow (A \hat{\otimes} B) \hat{\otimes} (A \hat{\otimes} B)^{**}$$

بعد از محاسبات نتیجه می گیریم که $A \hat{\otimes} B$ ، $\varphi \otimes \psi$ - میانگین پذیر چپ است. $\square$

تعریف ۴.۰۲. فرض کنید A یک جبر باناخ و $\varphi \in \Delta(A)$. جبر باناخ A را φ - میانگین پذیر داخلی گوئیم هرگاه تور کراندار $(a_\alpha) \subseteq A$ موجود باشد به طوریکه برای هر $a \in A$

$$aa_\alpha - a_\alpha a \rightarrow 0, \quad \varphi(a_\alpha) \rightarrow 1.$$

قضیه ۳.۰۲. فرض کنید A ، B و $A \hat{\otimes} B$ جبر های باناخ باشند. فرض کنید $\varphi \in \Delta(A)$ ، $\psi \in \Delta(B)$ ، A ، φ - میانگین پذیر داخلی و B ، ψ - میانگین پذیر داخلی باشند. آنگاه $A \hat{\otimes} B$ ، $\varphi \otimes \psi$ - میانگین پذیر داخلی است.

اثبات. عمل ضرب به ازای هر $a, c \in A$ و $b, d \in B$ روی $A \hat{\otimes} B$ را به صورت $(a \otimes b).(c \otimes d) = ac \otimes bd$ در نظر می‌گیریم. همچنین، تعریف می‌کنیم $\varphi \otimes \psi(a \otimes b) = \varphi(a)\psi(b)$.
تورهای کراندار $\{a_\alpha\}$ در A ، $\{b_\alpha\}$ در B و $\{a_\alpha \otimes b_\alpha\}$ در $A \hat{\otimes} B$ وجود دارند به طوری که به ازای هر $a \in A$ و $b \in B$

$$aa_\alpha - a_\alpha a \rightarrow 0, \quad \varphi(a_\alpha) \rightarrow 1,$$

و

$$bb_\alpha - b_\alpha b \rightarrow 0, \quad \psi(b_\alpha) \rightarrow 1.$$

داریم

$$\begin{aligned} (a \otimes b).(a_\alpha \otimes b_\alpha) - (a_\alpha \otimes b_\alpha).(a \otimes b) &= (aa_\alpha \otimes bb_\alpha) - (a_\alpha a \otimes b_\alpha b) \\ &= aa_\alpha \otimes \overbrace{(bb_\alpha - b_\alpha b)}^{0} \end{aligned}$$

لذا

$$(a \otimes b).(a_\alpha \otimes b_\alpha) - (a_\alpha \otimes b_\alpha).(a \otimes b) \rightarrow 0.$$

همچنین

$$\varphi \otimes \psi(a_\alpha \otimes b_\alpha) = \varphi(a_\alpha)\psi(b_\alpha) \rightarrow 1.$$

□

در نتیجه $A \hat{\otimes} B$ ، $\varphi \otimes \psi$ - میانگین پذیر داخلی است.

در قضیه بعد یک خاصیت موروثی را ثابت می‌کنیم. در واقع، به بررسی رابطه بین $\varphi \otimes \varphi$ - میانگین پذیری چپ و راست $A \hat{\otimes} A$ و $\varphi - A^{**}$ - دوتصویری جبر باناخ A می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که اگر جبر باناخ A ، A^{**} - دوتصویر باشد آنگاه به ازای $\varphi \in \Delta(A)$ ، جبر باناخ A ، $\varphi - A^{**}$ - دوتصویر خواهد بود.

قضیه ۴.۲. فرض کنید A و $A \hat{\otimes} A$ جبرهای باناخ و $\varphi \in \Delta(A)$. اگر A ، $\varphi - A^{**}$ - دوتصویر و جابجایی باشد، آنگاه $A \hat{\otimes} A$ ، $\varphi \otimes \varphi$ - میانگین پذیر چپ و راست است.

اثبات. با تعریف ضرب زیر

$$(a \otimes b).(c \otimes d) = ac \otimes bd, \quad (a, b, c, d \in A)$$

روی $A \hat{\otimes} A$ ، آنرا به جبر باناخ تبدیل می‌کنیم. از آنجا که A یک جبر باناخ جابجایی است لذا

$$(a \otimes b).(c \otimes d) = ac \otimes bd = ca \otimes db = (c \otimes d).(a \otimes b), \quad (a, b, c, d \in A),$$

در نتیجه $A \hat{\otimes} A$ نیز یک جبر باناخ جابجایی خواهد بود. چون A ، $\varphi - A^{**}$ - دوتصویر است. لذا بنا بر قضیه ۱.۳، $A \hat{\otimes} A$ ، $(A \hat{\otimes} A)^{**}$ - دوتصویر است. اکنون با در نظر گرفتن قضیه ۲.۲، $A \hat{\otimes} A$ ، $\varphi \otimes \varphi$ - میانگین پذیر چپ و راست خواهد بود.

□

نتیجه ۱.۲. فرض کنید A و $A \hat{\otimes} A$ جبرهای باناخ و $\varphi \in \Delta(A)$. در این صورت اگر A, φ - A^{**} - دوتصویر و دارای یکه تقریبی کراندار باشد آنگاه $A \hat{\otimes} A, \varphi \otimes \varphi$ - میانگین پذیر چپ و راست است.

اثبات. فرض کنید A یک جبر باناخ با یکه تقریبی چپ (راست) باشد بنابراین A, φ - میانگین پذیر چپ و راست است. اینک بنا بر قضیه ۲.۲ اثبات کامل می شود. $\square$

مراجع

- [1] Ghahramani, F., Loy, R.J., and Willis, G.A. (1996), *Amenability and weak amenability of second conjugate Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc, 124, 1489–1497.
- [2] Helemskii, A.Ya. (1989), *The Homology of Banach and Topological Algebras*, Kluwer Academic Publishers, Holland.
- [3] Johnson, B.E. (1972), *Cohomology in Banach algebras*, Mem. Amer. Math. Soc, 127.
- [4] Kaniuth, E., Lau, A.T., and Pym, J. (2008), *On ϕ -amenability of Banach algebras*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc, 144, 85–96.
- [5] Kaniuth, E., Lau, A.T., and Pym, J. (2008), *On character amenability of Banach algebras*, J. Math. Anal. Appl, 344, 942–955.
- [6] Lau, A.T. (1983), *Analysis on a class of Banach algebras with applications to harmonic analysis on locally compact groups and semigroups*, Fund. Math, 118, 161–175.
- [7] Monfared, M.S. (2008), *Character amenability of Banach algebras*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc, 144, 697–706.
- [8] Rostami, M., and Sahami, A. (2023), *A^{**} -biprojectivity of Banach algebras*, Measure Algebras and Applications, 1(1), 128–140.
- [9] Sahami, A., and Pourabbas, A. (2013), *On ϕ -biflat and ϕ -biprojective Banach algebras*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 20, 789–801.
- [10] Zhang, Y. (1999), *Nilpotent ideals in a class of Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc, 127, 3237–3242.

- [11] Tamimi, E., and Ghaffari, A. (2024), *On $\chi \otimes \eta$ -strong Connes amenability of certain dual Banach algebras*, J. Korean Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure Appl. Math. 31(1), 1-19.
- [12] Tamimi, E., and Ghaffari, A. (2025), *A Survey on χ -module Connes amenability of semigroup algebras*, Journal of Algebraic Systems, 13 (1), 53-67.