



On bimodule Connes amenability of certain Banach algebras

Ebrahim Tamimi¹ 

1. Department of Mathematics and Basic Science, Velayat University, Iranshahr, P.O.Box 99135475, Iran. Email: e.tamimi@velayat.ac.ir

Article Info	ABSTRACT
Article type: Research Article Article history: Received: 23 July 2024 Received in revised form: 12 October 2024 Accepted: 21 October 2024 Published Online: 21 December 2024 Keywords: U-Bimodule Connes amenability, Module extension Banach algebra, Projective tensor product, ($\psi_U^A, 0$)-Connes amenable, U-bimodule φ_U^A-derivation 2020 Mathematics Subject Classification: 46H25, 46J10, 46L06, 43A07	Let $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_*)^*$ and $\mathbb{B} = (\mathbb{B}_*)^*$ be dual Banach algebras and $\mathbb{U}$ be a Banach algebra. Let $\Omega = (\Omega_*)^*$ be a normal Banach $\mathbb{A}$-bimodule. In this paper, we investigate the notion of $\mathbb{U}$-bimodule $\varphi_U^A \otimes \psi_U^B$-Connes amenability for $\widehat{\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}}$, where $\varphi_U^A : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ and $\psi_U^B : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ are w^*-continuous homomorphisms. Also, we characterize the $\mathbb{U}$-bimodule $(\psi_U^B, 0)$-Connes amenability of the module extension of dual Banach algebra $\mathbb{A} \oplus \Omega$.

Cite this article: Tamimi, E. (2024). On bimodule Connes amenability of certain Banach algebras. *Measure Algebras and Applications*, 2(2), 1–14. <http://doi.org/10.22091/MAA.2025.11983.1026>



©The Author(s).

Publisher: University of Qom

DOI: 10.22091/MAA.2025.11983.1026

Extended Abstract

Introduction

The concept of amenability of Banach algebras to the case that there exists an additional $\mathbb{U}$ -module structure on Banach algebras, where $\mathbb{U}$ is Banach algebra is extended by Amini in [1].

Runde in [12–14], introduced the concept of Connes amenability of dual Banach algebras and this type of Banach algebras is interested by many researchers. Ghaffari and Javadi studied the notion of φ -Connes amenability of dual Banach algebras in [5]. A dual Banach algebra $\mathbb{A}$ is φ -Connes amenable if, for every normal φ -bimodule E , every bounded w^* -continuous derivation $D : \mathbb{A} \rightarrow E$ is inner. Connes amenability and strong Connes amenability for Lau product, projective tensor product of Banach algebras and l^1 -Munn algebras is investigated in [6, 7, 17].

The concept of module Connes amenability for dual Banach algebras which are also Banach modules with respect to the compatible actions, first defined by Amini in [2]. A type of module Connes amenability of semigroup algebras, module Connes amenability for projective tensor product and strong Connes amenability of certain dual Banach algebras is investigated in [16–18]. In fact, let $\mathbb{A}$ be a dual Banach algebra, $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ is a homomorphism and $\mathbb{U}$ be a Banach algebra and $\mathbb{A}$ is a Banach $\mathbb{U}$ -bimodule. We say that $\mathbb{A}$ is $\mathbb{U}$ -bimodule φ -Connes amenable, if for every commutative normal Banach $\mathbb{A}$ - $\mathbb{U}$ -bimodule E , every w^* -continuous $\mathbb{U}$ -bimodule φ -derivation $D : \mathbb{A} \rightarrow E$ is inner. Weak amenability of module extension of Banach algebras has further investigated and deepened by Zhang [19]. The Lau product of two Banach algebras was introduced by Lau in [9] for certain class of Banach algebras and followed by Monfared in [10] for the general case. The mentioned products not only provide important examples of Banach algebras which are pleasant in their own right but also they are known as a prolific source of (counter) examples in functional analysis and harmonic analysis. In present paper, we are going to study the notions of $\mathbb{U}$ -bimodule $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ -Connes amenability of projective tensor product $\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}$ and $\mathbb{U}$ -bimodule $(\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, 0)$ -Connes amenability of $\mathbb{U}$ -bimodule extension of Banach algebras $\mathbb{A} \oplus \Omega$ in which, $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ are dual Banach algebras, $\mathbb{X}$ is a normal Banach $\mathbb{A}$ -bimodule and $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ are w^* -continuous homomorphisms on $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$, respectively. Also, we study the relation between the mentioned notions for pointed Banach algebras and the first Banach algebras. In the follow, we present characterizations for the mentioned notions and give examples.

Conclusion

In this paper, the following definitions are stated: Consider $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_*)^*$ is a dual Banach algebra, and $\mathbb{U}$ is a Banach algebra such that $\mathbb{A}$ is a Banach $\mathbb{U}$ -bimodule via following compatible actions,

$$v.(ab) = (v.a).b, \quad (vw).a = v.(w.a), \quad (0.1)$$

for every $a, b \in \mathbb{A}, v, w \in \mathbb{U}$.

Let $\mathbb{E}$ be a normal dual Banach $\mathbb{A}$ -bimodule. Moreover, if $\mathbb{E}$ is an $\mathbb{U}$ -bimodule via

$$v.(a.e) = (v.a).e, \quad (a.v).e = a.(v.e), \quad (v.e).a = v.(e.a),$$

for every $a \in \mathbb{A}, v \in \mathbb{U}$ and $e \in \mathbb{E}$, then we say that $\mathbb{E}$ is a normal Banach left $\mathbb{A}$ - $\mathbb{U}$ -bimodule. Similarly,

for the right actions. Also, if moreover

$$v \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot v \quad (v \in \mathbb{U}, \mathbf{e} \in \mathbb{E}), \quad (0.2)$$

we say that $\mathbb{E}$ is commutative normal Banach $\mathbb{A}$ - $\mathbb{U}$ -bimodule.

Let $\mathbb{U}$ and $\mathbb{A}$ be Banach algebras, and let $\mathbb{E}$ be a (commutative) Banach $\mathbb{A}$ - $\mathbb{U}$ -bimodule, then so is $\mathbb{E}^*$. Indeed, in this case, $\mathbb{E}^*$ becomes a Banach $\mathbb{A}$ - $\mathbb{U}$ -bimodule. For more information see [11].

Definition 0.1. Let $\mathbb{A}$ and $\mathbb{U}$ be Banach algebras such that $\mathbb{A}$ is a Banach $\mathbb{U}$ -bimodule and $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ is a map that satisfied

$$\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(v \cdot a + b \cdot w) = v \cdot \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a) + \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(b) \cdot w, \quad \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(ab) = \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a) \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(b)$$

for every $a, b \in \mathbb{A}$ and $v, w \in \mathbb{U}$. Then we say that $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ is an $\mathbb{U}$ -bimodule algebraic homomorphism.

Definition 0.2. Let $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_*)^*$ be a (dual) Banach algebra. Let $\mathbb{U}$ be a (Commutative) Banach algebra such that $\mathbb{A}$ is a Banach $\mathbb{U}$ -bimodule, $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{A})$ and $\mathbb{E}$ be a Banach $\mathbb{A}$ - $\mathbb{U}$ -bimodule. A bounded map $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ from $\mathbb{A}$ to $\mathbb{E}$ is called a $\mathbb{U}$ -bimodule $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ -derivation if

$$\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(v \cdot a \pm b \cdot w) = v \cdot \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a) \pm \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(b) \cdot w, \quad \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(ab) = \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a) \cdot \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(b) + \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a) \cdot \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(b),$$

for all $a, b \in \mathbb{A}$ and $v, w \in \mathbb{U}$.

A bounded linear mapping $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}$ is called an inner $\mathbb{U}$ -bimodule $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ -derivation if there exists $x \in \mathbb{E}$ such that

$$\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a) = x \cdot \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a) - \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a) \cdot x \quad (a \in \mathbb{A}).$$

Definition 0.3. Let $\mathbb{A}$ be a dual Banach algebra. Let $\mathbb{U}$ be a Banach algebra such that $\mathbb{A}$ is a Banach $\mathbb{U}$ -bimodule and $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{A})$. We say that $\mathbb{A}$ is $\mathbb{U}$ -bimodule $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ -Connes amenable if for every commutative normal Banach $\mathbb{A}$ - $\mathbb{U}$ -bimodule $\mathbb{E}$, every w^* -continuous $\mathbb{U}$ -bimodule $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ -derivation $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}$ is inner.

Definition 0.4. Suppose that $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_*)^*$ is a dual Banach algebra and $\Omega = (\Omega_*)^*$ is a normal Banach $\mathbb{A}$ -bimodule. Let $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{A})$, $\chi \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\Omega)$, and $\mathbb{A} \oplus \Omega$ be a dual Banach algebra. Define

$$(\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \chi) : \mathbb{A} \oplus \Omega \rightarrow \mathbb{A} \oplus \Omega, \quad (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \chi)(a, w) = (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a), \chi(w))$$

for all $a \in \mathbb{A}$ and $w \in \Omega$. In this case we say that $(\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \chi) \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{A} \oplus \Omega)$.

Also, the next proposition, corollary and theorems are presented:

Theorem 0.5. Suppose that $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ are unital dual Banach algebras with preduals $\mathbb{A}_*$ and $\mathbb{B}_*$, respectively. Suppose that $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{A})$ and $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}} \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{B})$ are unital. Let $\mathbb{A}$ be $\mathbb{U}$ -bimodule $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ -Connes amenable, $\mathbb{B}$ be $\mathbb{U}$ -bimodule $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ -Connes amenable and $\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})$ be a unital dual Banach algebra. Then $\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})$ is $\mathbb{U}$ -bimodule $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ -Connes amenable.

Proposition 0.6. Let $\mathbb{U}$ be a Banach algebra, $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ be dual Banach $\mathbb{U}$ -bimodules algebras with compatible actions. Let $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{A})$, $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}} \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{B})$ and $\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}$ be $\mathbb{U}$ -bimodule $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ -Connes amenable dual Banach algebra. Then $\mathbb{A}$ is $\mathbb{U}$ -bimodule $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ -Connes amenable and $\mathbb{B}$ is $\mathbb{U}$ -bimodule $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ -Connes amenable.

Theorem 0.7. Let $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_*)^*$ be a dual Banach algebra and $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{A})$. Let $\Omega = (\Omega_*)^*$ be a normal Banach $\mathbb{A}$ -bimodule. Then the following hold:

- (I) If $\mathbb{A} \oplus \Omega$ is $\mathbb{U}$ -bimodule $(\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, 0)$ -Connes amenable, then $\mathbb{A}$ is $\mathbb{U}$ -bimodule $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ -Connes amenable.
- (II) If $\Omega\mathbb{A} = 0$ and $\mathbb{A}$ is $\mathbb{U}$ -bimodule $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ -Connes amenable, then $\mathbb{A} \oplus \Omega$ is $\mathbb{U}$ -bimodule $(\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, 0)$ -Connes amenable.

Corollary 0.8. Let $\mathbb{A}$ be a dual Banach algebra with predual $\mathbb{A}_*$ and let Ω be a normal Banach $\mathbb{A}$ -bimodule with pseudo-unital predual Ω_* . Then $\mathbb{A} \oplus \Omega$ is $\mathbb{U}$ -bimodule $(id, 0)$ -Connes amenable if and only if $\mathbb{A}$ is $\mathbb{U}$ -bimodule id -Connes amenable.



کان میانگین پذیری دومدولی جبرهای باناخ خاص

ابراهیم تمیمی^۱

۱. دانشکده ریاضی و علوم پایه، دانشگاه ولایت، ایرانشهر، صندوق پستی ۹۹۱۳۵۴۷۵، ایران. رایانامه: e.tamimi@velayat.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۵/۲ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۷/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۷/۳۰ تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۱۰/۱ کلمات کلیدی: کان میانگین پذیری $\mathbb{U}$- دومدولی، جبر باناخ گسترش مدولی، حاصل ضرب تانسوری تصویری، ($\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ$) - کان میانگین پذیر، $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$- اشتقاق $\mathbb{U}$- دومدولی رده بندی ریاضی: 46H25, 46J10, 46L06, 43A07	فرض کنید $\mathbb{B} = (\mathbb{B}_*)^*$ و $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_*)^*$ جبرهای باناخ دوگان و $\mathbb{U}$ یک جبر باناخ باشد. فرض کنید $\Omega = (\Omega_*)^*$. $\mathbb{A}$- دومدول باناخ نرمال باشد. در این مقاله، مفهوم $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$- کان میانگین پذیری $\mathbb{U}$- دومدولی $\mathbb{A} \widehat{\otimes} \mathbb{B}$ را که در آن $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ و $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ همبستگی های w^*- پیوسته هستند، بررسی می کنیم. همچنین، ($\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}, \circ$) - کان میانگین پذیری $\mathbb{U}$- دومدولی جبر باناخ دوگان گسترش مدولی $\mathbb{A} \oplus \Omega$ را مشخص سازی می کنیم.

استناد: تمیمی، ابراهیم. (۱۴۰۳). کان میانگین پذیری دومدولی جبرهای باناخ خاص. جبرهای اندازه و کاربردها، ۲(۲)، ۱-۱۴.
<http://doi.org/10.22091/MAA.2025.11983.1026>



ناشر: دانشگاه قم.

© نویسندگان.

۱ مقدمه

فرض کنید $\mathbb{U}$ یک جبر باناخ باشد. مفهوم میانگین پذیری جبرهای باناخ برای حالتی که یک ساختار $\mathbb{U}$ -مدولی روی جبرها وجود داشته باشد، توسط امینی در [۱] توسعه داده شد. رونده در [۱۲]، [۱۳]، [۱۴]، مفهوم کان میانگین پذیری جبرهای باناخ دوگان را معرفی کرد. بعداً این نوع جبرهای باناخ مورد توجه و علاقه بسیاری از محققان قرار گرفتند. در [۵] غفاری و جوادی مفهوم φ -کان میانگین پذیری جبرهای باناخ دوگان را مورد مطالعه قرار دادند. جبر باناخ دوگان $\mathbb{A}$ ، φ -کان میانگین پذیر نامیده می شود اگر برای هر φ -دومدول نرمال $\mathbb{E}$ ، هر اشتقاق w^* -پیوسته کران دار $D : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}$ درونی باشد. مفاهیم کان میانگین پذیری و کان میانگین پذیری قوی برای حاصل ضرب لائو، حاصل ضرب تانسوری تصویری جبرهای باناخ دوگان و جبرهای l^1 -مان در [۶]، [۷]، [۱۷] بررسی و مطالعه شد. مفهوم کان میانگین پذیری مدولی برای جبرهای باناخ دوگانی که مدول های باناخ نیز هستند، ابتدا توسط امینی در [۲] معرفی شد و سپس نسخه ای از کان میانگین پذیری مدولی برای جبرهای نیم گروهی و نسخه ای از کان میانگین پذیری قوی برای ضرب های تانسوری تصویری جبرهای باناخ دوگان خاص در [۱۶]، [۱۷]، [۱۸] مورد بررسی قرار گرفت. درواقع، فرض کنید $\mathbb{A}$ یک جبر باناخ دوگان، $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ یک هم ریختی، $\mathbb{U}$ یک جبر باناخ و $\mathbb{A}$ یک $\mathbb{U}$ -دومدول باناخ نیز باشد. در این صورت گوییم $\mathbb{A}$ ، φ -کان میانگین پذیر $\mathbb{U}$ -دومدولی است اگر برای هر $\mathbb{A}$ - $\mathbb{U}$ دوامدول باناخ نرمال جابجایی $\mathbb{E}$ ، هر φ -اشتقاق $\mathbb{U}$ -دومدولی w^* -پیوسته $D : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}$ درونی باشد. میانگین پذیری ضعیف مرتبط با گسترش مدولی جبرهای باناخ توسط ژانگ در [۱۹] به شکل ویژه مورد بررسی قرار گرفت. همچنین، ضرب لائوی دو جبر باناخ توسط لائو برای ردهی خاصی از جبرهای باناخ معرفی شد [۹] سپس منفرد آن را برای حالت کلی تری دنبال کرد [۱۰]. ضرب های نامبرده نه تنها مثال های مهمی از جبرهای باناخ که در نوع خودشان پراهمیت هستند، ارائه می دهند بلکه به عنوان منبع غنی از مثال های شناخته شده در آنالیز تابعی و هارمونیک هستند. در این مقاله، مفهوم $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ -کان میانگین پذیری $\mathbb{U}$ -دومدولی حاصل ضرب تانسوری تصویری $\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}$ و $(\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)$ -کان میانگین پذیری $\mathbb{U}$ -دومدولی جبرهای باناخ گسترش مدولی $\mathbb{A} \oplus \mathbb{X}$ بررسی می شود، که در آن $\mathbb{A}$ و $\mathbb{B}$ جبرهای باناخ دوگان و $\mathbb{X}$ یک $\mathbb{A}$ -دومدول باناخ نرمال و $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ و $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ به ترتیب هم ریختی های w^* -پیوسته روی $\mathbb{A}$ و $\mathbb{B}$ هستند. همچنین، به مطالعه رابطه بین مفهوم نامبرده برای جبرهای خاص گفته شده و جبرهای اولیه مولد آن ها می پردازیم. در ادامه، مشخص سازی هایی را برای مفهوم مذکور به همراه مثال ارائه می دهیم.

۲ $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ -کان میانگین پذیری $\mathbb{U}$ -دومدولی حاصل ضرب تانسوری تصویری جبرهای باناخ دوگان

فرض کنید $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_*)^*$ یک جبر باناخ دوگان و $\mathbb{U}$ یک جبر باناخ باشد به طوری که $\mathbb{A}$ به ازای هر $a, b \in \mathbb{A}$ و $v, w \in \mathbb{U}$ با اعمال سازگار

$$v.(ab) = (v.a).b, \quad (vw).a = v.(w.a), \quad (1.2)$$

یک $\mathbb{U}$ -دومدول باناخ باشد.

فرض کنید $\mathbb{E}$ یک $\mathbb{A}$ -دومدول باناخ دوگان نرمال باشد. به علاوه، اگر $\mathbb{E}$ به ازای هر $a \in \mathbb{A}$ و $v \in \mathbb{U}$ و $e \in \mathbb{E}$ ، با اعمال

$$v.(a.e) = (v.a).e, \quad (a.v).e = a.(v.e), \quad (v.e).a = v.(e.a),$$

یک $\mathbb{U}$ -دومدول باشد، آنگاه گوییم $\mathbb{E}$ یک $\mathbb{A}$ - $\mathbb{U}$ دوامدول چپ باناخ نرمال است. $\mathbb{A}$ - $\mathbb{U}$ دوامدول راست باناخ نرمال به طور مشابه تعریف می شود. همچنین، اگر علاوه بر آن، شرط

$$v.e = e.v \quad (v \in \mathbb{U}, e \in \mathbb{E}), \quad (2.2)$$

برقرار باشد، آنگاه گوییم $\mathbb{E}$ یک $\mathbb{A}$ - $\mathbb{U}$ دوامدول باناخ نرمال جابجایی است.

فرض کنید $\mathbb{A}$ و $\mathbb{U}$ جبرهای باناخ و $\mathbb{E}$ یک $\mathbb{A}$ - $\mathbb{U}$ دوامدول باناخ (جابجایی) باشد، آنگاه $\mathbb{E}^*$ نیز چنین است. درواقع، در این حالت $\mathbb{E}^*$ به $\mathbb{A}$ - $\mathbb{U}$ دوامدول باناخ تبدیل می شود (برای اطلاعات بیشتر به [۱۱] مراجعه شود).

تعریف ۱.۲. فرض کنید $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_*)^*$ یک جبر باناخ دوگان باشد. فرض کنید $\mathbb{U}$ یک جبر باناخ (جابجایی) باشد به طوری که $\mathbb{A}$ یک $\mathbb{U}$ -دومدول باناخ، و $\mathbb{E}$ یک $\mathbb{A}$ - $\mathbb{U}$ دوامدول باشد و $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \in H_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{A})$. نگاشت کران دار $D_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}$ را یک $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ -اشتقاق $\mathbb{U}$ -دومدولی گوییم اگر برای هر $a, b \in \mathbb{A}$ و $v, w \in \mathbb{U}$

$$D_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(v.a \pm b.w) = v.D_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a) \pm D_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(b).w, \quad D_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(ab) = D_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a).\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(b) + \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a).D_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(b).$$

نگاشت خطی کران‌دار $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}$ را $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}$ و $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}$ اشتقاق $\mathbb{U}$ -دومدولی درونی گوییم اگر $x \in \mathbb{E}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in \mathbb{A}$

$$\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a) = x \cdot \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a) - \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a) \cdot x.$$

تعریف ۲.۲. فرض کنید $\mathbb{A}$ یک جبر باناخ دوگان و $\mathbb{U}$ یک جبر باناخ باشد به‌طوری‌که $\mathbb{A}$ یک $\mathbb{U}$ -دومدول باناخ باشد و $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{A})$. در این صورت گوییم $\mathbb{A}$ ، $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ -کان میانگین‌پذیر $\mathbb{U}$ -دومدولی است اگر برای هر $\mathbb{A}$ - $\mathbb{U}$ -دومدول باناخ نرمال جابجایی $\mathbb{E}$ ، هر $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ -اشتقاق $\mathbb{U}$ -دومدولی w^* -پیوسته $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}$ درونی باشد.

در سراسر این بخش فرض کنید $\mathbb{U}$ جبر باناخ، $\mathbb{A}$ ، $\mathbb{B}$ و $\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}$ جبرهای باناخ دوگان باشند به‌طوری‌که $\mathbb{A}$ و $\mathbb{B}$ ، $\mathbb{U}$ -دومدول‌های باناخ باشند. فرض کنید $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{A})$ و $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}} \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{B})$. هدف اصلی در این بخش مطالعه و ارائه تکنیک‌های مشخص‌سازی برای $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ -کان میانگین‌پذیری $\mathbb{U}$ -دومدولی جبر باناخ دوگان $\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}$ است.

ملاحظه ۳.۲. فرض کنید $\mathbb{A}$ و $\mathbb{B}$ جبرهای باناخ دوگان، به‌ترتیب با پیش‌دوگان‌های $\mathbb{A}_*$ و $\mathbb{B}_*$ باشند. از آنجاکه هر جبر باناخ دوگان روی خودش یک مدول باناخ دوگان نرمال است لذا به‌وسیله [۱۴]، نتیجه [۶.۴] و اثبات آن، نتیجه می‌شود که $\mathbb{A}_* \subset \sigma wc(\mathbb{A}^*)$ و $\mathbb{B}_* \subset \sigma wc(\mathbb{B}^*)$ همچنین، $\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}$ را می‌توان در $(\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}))^*$ نشان داد.

قضیه ۴.۲. فرض کنید $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_*)^*$ و $\mathbb{B} = (\mathbb{B}_*)^*$ جبرهای باناخ دوگان یک‌دار، $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{A})$ و $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}} \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{B})$ یک‌دار باشند. فرض کنید $\mathbb{A}$ ، $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ -کان میانگین‌پذیر $\mathbb{U}$ -دومدولی، $\mathbb{B}$ ، $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ -کان میانگین‌پذیر $\mathbb{U}$ -دومدولی و $\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})$ جبر باناخ دوگان یک‌دار باشد. آنگاه $\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})$ ، $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ -کان میانگین‌پذیر $\mathbb{U}$ -دومدولی است.

اثبات. فرض کنید $\mathbb{E}$ یک $\mathbb{U}$ - $\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})$ -دومدول باناخ نرمال جابجایی و $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})} : \sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{E}$ یک $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ -اشتقاق $\mathbb{U}$ -دومدولی w^* -پیوسته کران‌دار باشد به‌طوری‌که برای هر $a, a' \in \mathbb{A}$ و $b, b' \in \mathbb{B}$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})}((a \otimes b)(a' \otimes b')) &= \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})}(a \otimes b) \cdot \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}(a' \otimes b') \\ &\quad + \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}(a \otimes b) \cdot \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})}(a' \otimes b'). \end{aligned}$$

نشان می‌دهیم که $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})}$ با در نظر گرفتن عمل مدولی

$$(a \otimes b) \cdot \mathbf{e} = \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}(a \otimes b) \mathbf{e}. \quad (۳.۲)$$

برای هر $a \in \mathbb{A}$ ، $b \in \mathbb{B}$ و $\mathbf{e} \in \mathbb{E}_*$ درونی است. از آنجاکه $\mathbb{E}$ یک $\mathbb{U}$ - $\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})$ -دومدول باناخ است لذا $\mathbb{E}_*$ نیز چنین است. خوانندگان علاقمند جهت اطلاعات بیشتر به ([۱۵]، تمرین ۱.۱.۲)، رجوع کنند. طبق [۱۴]، نتیجه [۶.۴] الحاق $(\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})})^*$ پیش‌دوگان $\mathbb{E}_*$ را به $\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})^*$ می‌نگارد. فرض کنید $(\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})})^*|_{\mathbb{E}_*}$ تحدید $(\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})})^*$ به $\mathbb{E}_*$ باشد. برای هر $a, a' \in \mathbb{A}$ ، $b, b' \in \mathbb{B}$ و $\mathbf{e}_* \in \mathbb{E}_*$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \langle a' \otimes b', (\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})})^*|_{\mathbb{E}_*}((a \otimes b) \cdot \mathbf{e}_*) \rangle &= \langle \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})}(a' \otimes b'), (a \otimes b) \cdot \mathbf{e}_* \rangle \\ &= \langle \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})}(a' \otimes b'), \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}(a \otimes b) \mathbf{e}_* \rangle \\ &= \langle \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})}(a' \otimes b'), \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}(a \otimes b), \mathbf{e}_* \rangle \\ &= \langle \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})}((a' \otimes b')(a \otimes b)), \mathbf{e}_* \rangle \\ &\quad - \langle \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}(a' \otimes b'), \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})}(a \otimes b), \mathbf{e}_* \rangle \\ &= \langle (a' \otimes b') \cdot (a \otimes b), (\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})})^*|_{\mathbb{E}_*}(\mathbf{e}_*) \rangle \\ &\quad - \langle \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}(a' \otimes b'), \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})}(a \otimes b), \mathbf{e}_* \rangle \\ &= \langle a' \otimes b', (a \otimes b) \cdot (\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})})^*|_{\mathbb{E}_*}(\mathbf{e}_*) \rangle \\ &\quad - \langle \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}(a' \otimes b'), \mathbf{e}_*, \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})}(a \otimes b) \rangle. \end{aligned}$$

از این رو برای هر $a \in \mathbb{A}$ ، $b \in \mathbb{B}$ و $e_0 \in \mathbb{E}_*$ داریم

$$(\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{swc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})})^*|_{\mathbb{E}_*}((a \otimes b).e_0) = (a \otimes b).(\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{swc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})})^*|_{\mathbb{E}_*}(e_0) - \langle e_0, \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{swc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})}(a \otimes b) \rangle \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}. \quad (۴.۲)$$

اینک فرض کنید $e_{\mathbb{A}}$ ، $e_{\mathbb{B}}$ و $e_{\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}}$ ، به ترتیب همانی های جبرهای باناخ دوگان $\mathbb{A}$ ، $\mathbb{B}$ و $\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}$ باشند. به کمک مفروضات قضیه، در نظر بگیرید $\square$ $(\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}})(a \otimes b) = e_{\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}}$. اینک با استفاده از رابطه (۴.۲)، درونی بودن $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{swc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B})}$ نتیجه می شود.

مثال ۵.۲. $\mathbb{A} = \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ 0 & \mathbb{C} \end{pmatrix}$ را با ضرب ماتریسی معمولی و l^1 -نرم در نظر می گیریم. بدیهی است که $\mathbb{A}$ یک جبر باناخ دوگان

است. فرض کنید $\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ 0 & \mathbb{C} \end{pmatrix}$. آنگاه بدیهی است که $\mathbb{A}$ یک $\mathbb{U}$ -دومدول باناخ است. به ازای هر $\zeta, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$ هم ریختی $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} (= \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}) : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix}.$$

به ازای هر $\zeta, \xi_1, \xi_2, \zeta', \xi'_1, \xi'_2 \in \mathbb{C}$ داریم

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \left[\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta' & 0 \\ \xi'_1 & \xi'_2 \end{pmatrix} \right] &= \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} \zeta \zeta' & 0 \\ \xi_1 \zeta' + \xi_2 \xi'_1 & \xi_2 \xi'_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \zeta \zeta' & 0 \\ 0 & \xi_2 \xi'_2 \end{pmatrix} \\ &= \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} \zeta' & 0 \\ \xi'_1 & \xi'_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

همچنین به ازای هر $\zeta, \xi_1, \xi_2, \zeta', \xi'_1, \xi'_2, b, d, e, f \in \mathbb{C}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \left[\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta' & 0 \\ \xi'_1 & \xi'_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right] &= \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \left[\begin{pmatrix} e\zeta & 0 \\ b\xi_1 & b\xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta'f & 0 \\ \xi'_1f & \xi'_2d \end{pmatrix} \right] \\ &= \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} e\zeta + \zeta'f & 0 \\ b\xi_1 + \xi'_1f & b\xi_2 + \xi'_2d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e\zeta + \zeta'f & 0 \\ 0 & b\xi_2 + \xi'_2d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

از طرف دیگر به ازای هر

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{U}$$

برای هر $b, d, e, f \in \mathbb{C}$ به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} + \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} \zeta' & 0 \\ \xi'_1 & \xi'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta' & 0 \\ 0 & \xi'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e\zeta & 0 \\ 0 & b\xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta'f & 0 \\ 0 & \xi'_2d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e\zeta + \zeta'f & 0 \\ 0 & b\xi_2 + \xi'_2d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

داریم

$$\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

از این رو $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ هم‌ریختی جبری $\mathbb{U}$ -دومدولی و یک‌دار است. دقت کنید که $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{A})$ نرم پیوسته و w^* -پیوسته است. برای این منظور، فرض کنید $A = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix}$ و $A_{\alpha} = \begin{pmatrix} \zeta_{\alpha} & 0 \\ (\xi_1)_{\alpha} & (\xi_2)_{\alpha} \end{pmatrix}$ از این رو $A_{\alpha} \xrightarrow{w^*} A$. $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(A_{\alpha}) \xrightarrow{w^*} \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(A)$ و لذا $\begin{pmatrix} \zeta_{\alpha} & 0 \\ 0 & (\xi_2)_{\alpha} \end{pmatrix} \xrightarrow{w^*} \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix}$. این نتیجه می‌دهد $\xi_2 \xrightarrow{w^*} (\xi_2)_{\alpha}$ و $\zeta \xrightarrow{w^*} \zeta_{\alpha}$. اینک فرض کنید $\zeta \in \mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{A}$ $u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & i \end{pmatrix} \in \mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{A}$ به راحتی می‌توان دید که $u \in \sigma wc((\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{A})^*)^*$ زیرا $\mathbb{A} (= \mathbb{B})$ ، $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} (= \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}})$ دومدولی است. فرض کنید $e_{\mathbb{A}}$ ، $e_{\mathbb{B}}$ و $e_{\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}}$ به ترتیب همانی‌های $\mathbb{A}$ ، $\mathbb{B}$ و $\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}$ باشند. خواهیم داشت $e_{\mathbb{A}} = e_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $e_{\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ در نتیجه $\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{A})$ جبر باناخ دوگان یک‌دار و $\sigma wc(\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{A})$ ، $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ کان میانگین‌پذیر $\mathbb{U}$ -دومدولی است.

در گزاره زیر نشان می‌دهیم که عکس قضیه ۴.۲ در حالت ویژه برای $\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}$ برقرار است.

گزاره ۶.۲. فرض کنید $\mathbb{U}$ یک جبر باناخ، $\mathbb{A}$ و $\mathbb{B}$ جبرهای باناخ دوگان $\mathbb{U}$ -دومدولی با اعمال سازگار باشند. فرض کنید $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{A})$ ، $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}} \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{B})$ جبر باناخ دوگان $\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}$ و $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ کان میانگین‌پذیر $\mathbb{U}$ -دومدولی باشد. در این صورت $\mathbb{A}$ ، $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ -کان میانگین‌پذیر $\mathbb{U}$ -دومدولی و $\mathbb{B}$ ، $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ -کان میانگین‌پذیر $\mathbb{U}$ -دومدولی است.

اثبات. فرض کنید $\mathbb{E}$ یک $\mathbb{A}$ - $\mathbb{U}$ و $\mathbb{B}$ - $\mathbb{U}$ مدول باناخ نرمال جابجایی و $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}$ و $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}$ به ترتیب $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ -اشتقاق $\mathbb{U}$ -دومدولی و $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ -اشتقاق $\mathbb{U}$ -دومدولی w^* -پیوسته باشند. کافی است نشان دهیم که $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ درونی است. برای این منظور، اعمال مدولی $\mathbb{E}$ روی $\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$x \bullet (a \otimes b) = xa, \quad (a \otimes b) \bullet x = bx, \quad (x \in \mathbb{E}, a \otimes b \in \mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}).$$

در این صورت می‌توان $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ را روی $\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}$ گسترش داد. فرض کنید این گسترش، $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}} : \mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E}$ برای هر $a, a' \in \mathbb{A}$ و $b, b' \in \mathbb{B}$ با ضابطه

$$\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}}(a \otimes b) = \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a) \bullet \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a') + \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}(b') \bullet \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}(b),$$

باشد. بدیهی است که $\mathbb{E}$ ، $\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}$ - $\mathbb{U}$ مدول باناخ نرمال جابجایی است. همچنین، $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ یک هم‌ریختی جبری $\mathbb{U}$ -دومدولی است. آشکارا، $d := \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}} \circ (\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}})$ یک $\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}$ -اشتقاق $\mathbb{U}$ -دومدولی w^* -پیوسته است، زیرا برای هر $a \otimes b, a' \otimes b' \in \mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}$ و $v, w \in \mathbb{U}$ داریم

$$\begin{aligned} d(v.(a \otimes b) + (a' \otimes b').w) &= \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}} \circ (\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}})(v.(a \otimes b) + (a' \otimes b').w) \\ &= \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}}[(\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}})(v.(a \otimes b)) + (\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}})((a' \otimes b').w)] \\ &= \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}}[(\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}})(v.(a \otimes b))] + \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}}[(\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}})((a' \otimes b').w)] \\ &= v.\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}}[(\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}})((a \otimes b))] + \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}}[(\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}})((a' \otimes b'))].w \\ &= v.d(a \otimes b) + d(a' \otimes b').w. \end{aligned}$$

از طرف دیگر به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} d((a \otimes b).(a' \otimes b')) &= \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \hat{\otimes} \mathbb{B}} \circ (\varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}})((a \otimes b).(a' \otimes b')) \\ &= d(a \otimes b) \bullet \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}(a' \otimes b') \\ &\quad + \varphi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \otimes \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}(a \otimes b) \bullet d(a' \otimes b'). \end{aligned}$$

و همچنین با استفاده از $\varphi_U^A \otimes \psi_U^B$ - کان میانگین پذیری $\mathbb{U}$ - دومدولی جبر باناخ $\widehat{\mathbb{A}} \widehat{\otimes} \mathbb{B}$ عنصر $f \in \mathbb{E}$ وجود دارد به طوری که برای هر $a \in \mathbb{A}$ و $b \in \mathbb{B}$

$$\begin{aligned} d(a \otimes b) &= (\varphi_U^A \otimes \psi_U^B)(a \otimes b) \bullet f - f \bullet (\varphi_U^A \otimes \psi_U^B)(a \otimes b) \\ &= \varphi_U^A(a) \otimes \psi_U^B(b) f - f \varphi_U^A(a) \otimes \psi_U^B(b) \\ &= (\varphi_U^A \otimes \psi_U^B)(a \otimes b) \cdot f - f \cdot (\varphi_U^A \otimes \psi_U^B)(a \otimes b) \end{aligned} \quad (5.2)$$

قرض کنید $a' \in \mathbb{A}$ و $b' \in \mathbb{B}$ در این صورت با استفاده از رابطه (5.2)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_U^{\widehat{\mathbb{A}} \widehat{\otimes} \mathbb{B}}(a' \otimes b') &= \mathcal{D}_U^{\widehat{\mathbb{A}} \widehat{\otimes} \mathbb{B}}(\varphi_U^A \otimes \psi_U^B(a \otimes b)) = d(a \otimes b) \\ &= f \cdot (\varphi_U^A \otimes \psi_U^B)(a \otimes b) - (\varphi_U^A \otimes \psi_U^B)(a \otimes b) \cdot f \\ &= f \bullet (a' \otimes b') - (a' \otimes b') \bullet f. \end{aligned}$$

از این رو، $\mathcal{D}_U^{\widehat{\mathbb{A}} \widehat{\otimes} \mathbb{B}}$ یک $\varphi_U^A \otimes \psi_U^B$ - اشتقاق $\mathbb{U}$ - دومدولی درونی است. از آنجاکه $\mathcal{D}_U^{\widehat{\mathbb{A}} \widehat{\otimes} \mathbb{B}}$ تحدید $\mathcal{D}_U^{\widehat{\mathbb{A}} \widehat{\otimes} \mathbb{B}}$ به $\widehat{\mathbb{A}} \widehat{\otimes} \mathbb{B}$ است، لذا $\mathcal{D}_U^{\widehat{\mathbb{A}} \widehat{\otimes} \mathbb{B}}|_{\widehat{\mathbb{A}} \widehat{\otimes} \mathbb{B}} = \mathcal{D}_U^{\widehat{\mathbb{A}} \widehat{\otimes} \mathbb{B}}$ درونی بوده و به طور مشابه ψ_U^B - کان میانگین پذیر $\mathbb{U}$ - دومدولی خواهد بود. $\square$

۳ $(\psi_U^A, \circ)$ - کان میانگین پذیری $\mathbb{U}$ - دومدولی گسترش $\mathbb{U}$ - دومدولی جبرهای باناخ

در این بخش، کان میانگین پذیری $\mathbb{U}$ - دومدولی برای گسترش $\mathbb{U}$ - دومدولی جبرهای باناخ دوگان را مورد بررسی قرار می دهیم. فرض کنید $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_*)^*$ یک جبر باناخ دوگان و $\Omega = (\Omega_*)^*$ یک $\mathbb{A}$ - دومدول باناخ نرمال باشد. در حقیقت، جبر باناخ $\mathbb{A} \oplus \Omega$ ، l^1 - مجموع مستقیم جبر باناخ $\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}$ - دومدول باناخ ناصفر Ω ، با ضرب جبری

$$(a, \omega) \bullet_{\mathbb{A} \oplus \Omega} (a', \omega') = (aa', a\omega' + \omega a'), \quad (a, a' \in \mathbb{A}, \omega, \omega' \in \Omega) \quad (1.3)$$

و نرم تعریف شده به صورت

$$\|(a, \omega)\|_{\mathbb{A} \oplus \Omega} = \|a\|_{\mathbb{A}} + \|\omega\|_{\Omega},$$

است که آن را یک گسترش $\mathbb{U}$ - دومدولی جبر باناخ گوئیم. علاقه مندان برای اطلاعات بیشتر در مورد چنین جبرهایی به [۳] مراجعه کنند. بدیهی است که $\mathbb{A} \oplus \Omega$ یک جبر باناخ دوگان با پیش دوگان $\mathbb{A}_* \oplus \Omega_*$ ، که در آن $\oplus_\infty$ اشاره به l_∞ - مجموع مستقیم $\mathbb{A}$ - دومدول های باناخ است. دوگان و دوگان دوم $\mathbb{A} \oplus \Omega$ را به ترتیب با $\mathbb{A}^* \oplus \Omega^* = (\mathbb{A} \oplus \Omega)^*$ و $\mathbb{A}^{**} \oplus \Omega^{**} = (\mathbb{A} \oplus \Omega)^{**}$ یکسان در نظر می گیریم. بر طبق [۲، ص. ۲۷ و ۲۸]، Ω^{**} ، یک $\mathbb{A}^{**}$ - دومدول باناخ است که در آن $\mathbb{A}^{**}$ به حاصل ضرب اول آرنز مجهز است (برای جزئیات بیشتر در این زمینه به [۱۹] مراجعه شود). در [۴]، نویسندگان نشان دادند که اگر $\psi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ هم ریختی کران دار خطی و جبر باناخ دوگان $\mathbb{A} \oplus \Omega$ ، $(\psi, \circ)$ - میانگین پذیر باشد، آنگاه $\mathbb{A}$ ، ψ - میانگین پذیر و عکس موضوع برای حالتی که $\Omega \mathbb{A} = 0$ برقرار است. همچنین در [۱۷] این موضوع برای نوع ضعیف تری از میانگین پذیری، یعنی برای کان میانگین پذیری قوی نشان داده شده است. در اینجا نتایج را برای نسخه ضعیف تر دیگری از میانگین پذیری، یعنی $(\psi_U^A, \circ)$ - کان میانگین پذیری $\mathbb{U}$ - دومدولی که در آن $\psi_U^A \in \mathbf{H}_U^{w*}(\mathbb{A})$ نشان می دهیم. شایان ذکر است که فضای همه هم ریختی های جبری $\mathbb{U}$ - دومدولی کران دار w^* - پیوسته از $\mathbb{A} \oplus \Omega$ به خودش را با $\mathbf{H}_U^{w*}(\mathbb{A} \oplus \Omega)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنید $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_*)^*$ یک جبر باناخ دوگان و $\Omega = (\Omega_*)^*$ یک $\mathbb{A}$ - دومدول باناخ نرمال باشد. فرض کنید $\psi_U^A \in \mathbf{H}_U^{w*}(\mathbb{A})$ ، $\chi \in \mathbf{H}_U^{w*}(\Omega)$ و $\mathbb{A} \oplus \Omega$ یک جبر باناخ دوگان باشد. به ازای هر $a \in \mathbb{A}$ و $w \in \Omega$ ، نگاشت (ψ_U^A, χ) را با ضابطه

$$(\psi_U^A, \chi) : \mathbb{A} \oplus \Omega \rightarrow \mathbb{A} \oplus \Omega, \quad (\psi_U^A, \chi)(a, w) = (\psi_U^A(a), \chi(w))$$

تعریف می کنیم. در این صورت می نویسیم $(\psi_U^A, \chi) \in \mathbf{H}_U^{w*}(\mathbb{A} \oplus \Omega)$.

قضیه بعدی مقایسه کان میانگین پذیری $\mathbb{U}$ - دومدولی [۸، قضیه ۱.۱] و کان میانگین پذیری جبر باناخ دوگان [۶، قضیه ۲.۴] است.

قضیه ۲.۳. فرض کنید $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_*)^*$ یک جبر باناخ دوگان و $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \in \mathbf{H}_{\mathbb{U}}^{w*}(\mathbb{A})$. فرض کنید $\Omega = (\Omega_*)^*$ ، $\mathbb{A}$ - دومدول باناخ نرمال باشد. آنگاه خواهیم داشت

(الف) اگر $\Omega \oplus \mathbb{A}$ ، $(\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)$ - کان میانگین‌پذیر $\mathbb{U}$ - دومدولی باشد، آنگاه $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ - کان میانگین‌پذیر $\mathbb{U}$ - دومدولی است.

(ب) اگر $\Omega \mathbb{A} = \circ$ و $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ - کان میانگین‌پذیر $\mathbb{U}$ - دومدولی باشد، آنگاه $(\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)$ - کان میانگین‌پذیر $\mathbb{U}$ - دومدولی است.

اثبات. (الف) فرض کنید $\mathbb{U}$ یک جبر باناخ و $\mathbb{E} = \mathbb{A} - \mathbb{U}$ دومدول باناخ نرمال جابجایی باشد. لذا $\mathbb{E} = \mathbb{A} \oplus \Omega - \mathbb{U}$ - دومدول باناخ نرمال جابجایی است که عمل مدولی چپ آن برای هر $(a, w) \in \mathbb{A} \oplus \Omega$ ، $x \in \mathbb{E}$ به صورت

$$(a, w).x = (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a, w)x = (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a), \circ)x, \quad x.(a, w) = x(\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a, w) = x(\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a), \circ), \quad (2.3)$$

داده شده است. فرض کنید $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}$ یک $\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ - اشتقاق $\mathbb{U}$ - دومدولی w^* - پیوسته کران‌دار باشد. نگاشت تصویر $P_{\mathbb{U}} : \mathbb{A} \oplus \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ با شرط $P_{\mathbb{U}}(a, w) = a$ برای هر $(a, w) \in \mathbb{A} \oplus \Omega$ را در نظر می‌گیریم. برای الحاقی $P_{\mathbb{U}}$ یعنی $P_{\mathbb{U}}^*$ به‌ازای هر $f \in \mathbb{A}_*$ و $a \in \mathbb{A}$ خواهیم داشت $P_{\mathbb{U}}^*(a.f) = a.P_{\mathbb{U}}^*(f)$. فرض کنید $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega} := \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \circ P_{\mathbb{U}} : \mathbb{A} \oplus \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ نشان می‌دهیم که $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}$ یک $(\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)$ - اشتقاق $\mathbb{U}$ - دومدولی است. به‌ازای هر $\lambda, \eta \in \mathbb{U}$ ، $a, a' \in \mathbb{A}$ و $w, w' \in \Omega$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(\lambda(a, w) + (a', w')\eta) &= \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \circ P_{\mathbb{U}}(\lambda(a, w) + (a', w')\eta) \\ &= \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \circ P_{\mathbb{U}}(\lambda a + a'\eta, \lambda w + w'\eta) \\ &= \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(\lambda a + a'\eta) \\ &= \lambda \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a) + \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a')\eta \\ &= \lambda \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(P_{\mathbb{U}}(a, w)) + \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(P_{\mathbb{U}}(a', w'))\eta \\ &= \lambda \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a, w) + \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a', w')\eta. \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}((a, w) \bullet_{\mathbb{A} \oplus \Omega} (a', w')) &= \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} \circ P_{\mathbb{U}}(aa', aw' + wa') \\ &= \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(aa') \\ &= \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a)\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a') + \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a)\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a') \\ &= \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(P_{\mathbb{U}}(a, w))\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a') + \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a)\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(P_{\mathbb{U}}(a', w')) \\ &= \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a, w) \bullet_{\mathbb{A} \oplus \Omega} (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a', w') + (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a, w) \bullet_{\mathbb{A} \oplus \Omega} \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a', w'). \end{aligned}$$

به کمک فرض قضیه، $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}$ درونی خواهد بود. لذا $t \in \mathbb{E}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $a \in \mathbb{A}$ و $w \in \Omega$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a, w) &= t.(\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a, w) - (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a, w).t \\ &= t.(\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a), \circ) - (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a), \circ).t \\ &= \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a), \end{aligned}$$

از این رو اثبات کامل می‌شود.

(ب) فرض کنید $\mathbb{U}$ یک جبر باناخ و $\mathbb{E} = \mathbb{A} \oplus \Omega - \mathbb{U}$ دومدول باناخ نرمال جابجایی باشد. به کمک اعمال سازگار در رابطه (۱.۲)، $\mathbb{A}$ یک $\mathbb{U}$ - دومدول باناخ نرمال است. لذا $\mathbb{E} = \mathbb{A} - \mathbb{U}$ دومدول باناخ نرمال جابجایی است. فرض کنید $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega} : \mathbb{A} \oplus \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ یک $(\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)$ - اشتقاق $\mathbb{U}$ - دومدولی w^* - پیوسته کران‌دار باشد. فرض کنید $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} := \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}|_{\mathbb{A}}$ تحدید $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}$ به $\mathbb{A}$ باشد. ابتدا با استفاده از مبحث فوق ادعا می‌کنیم که $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}$ درونی است. فرض کنید که $\mathbb{E}_* \rightarrow (\mathbb{A} \oplus \Omega)^*$ $(\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega})^*$ الحاقی $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}$ باشد. فرض کنید $(\mathbb{A} \oplus \Omega)^{**} \rightarrow (\mathbb{A} \oplus \Omega)^*$ π تصویر دیکسمایر باشد. اکنون فرض کنید که $T_{\mathbb{U}} : \mathbb{A} \rightarrow (\mathbb{A} \oplus \Omega)^{**}$ پوشا باشد. با استفاده از این موضوع و فرض قضیه نتیجه می‌شود که $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}} = \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega} \circ \pi \circ T_{\mathbb{U}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}$ درونی است. فرض کنید $\mathcal{M} \in (\mathbb{A} \oplus \Omega)^{**}$. لذا $x \in \mathbb{E}$ و $a \in \mathbb{A}$ وجود دارند که

$$\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega} \circ \pi(\mathcal{M}) = \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega} \circ \pi \circ T_{\mathbb{U}}(a) = x.\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a) - \psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}(a).x.$$

این مطلب ادعا را برای $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}$ ثابت می‌کند. برای تکمیل اثبات با استفاده از رابطه (۲.۳) برای هر $(a, \omega), (a', \omega') \in \mathbb{A} \oplus \Omega$ و $e \in \mathbb{E}_*$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \langle (\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega})^*(e.(a, \omega)), (a', \omega') \rangle &= \langle e.(a, \omega), \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a', \omega') \rangle \\ &= (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a, \omega) \langle e, \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a', \omega') \rangle \\ &= (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a, \omega) \langle (\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega})^*(e), (a', \omega') \rangle \end{aligned}$$

آنگاه

$$(\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega})^*(e.(a, \omega)) = (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a, \omega) (\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega})^*(e). \quad (۳.۳)$$

اکنون قرار می‌دهیم $t = \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega} \circ \pi(\mathcal{M}) \in \mathbb{E}$ آنگاه با استفاده از رابطه (۳.۳) برای هر $(a, \omega) \in \mathbb{A} \oplus \Omega$ و $e \in \mathbb{E}_*$

$$\begin{aligned} \langle e, (a, \omega).t \rangle &= \langle e, (a, \omega).(\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega} \circ \pi)(\mathcal{M}) \rangle \\ &= \langle (\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega})^*(e.(a, \omega)), \pi(\mathcal{M}) \rangle \\ &= (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a, \omega) \langle (\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega})^*(e), \pi(\mathcal{M}) \rangle \\ &= (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a, \omega) \langle e, \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega} \circ \pi(\mathcal{M}) \rangle \\ &= (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a, \omega) \langle e, t \rangle. \end{aligned}$$

بنابراین

$$(a, \omega).t = (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a, \omega).t. \quad (۴.۳)$$

از آنجاکه $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}$ یک $(\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)$ -اشتقاق $\mathbb{U}$ -دومدولی است، لذا برای عمل چپ $\mathbb{A} \oplus \Omega$ روی $\mathbb{E}$ برای هر $(a', \omega') \in \mathbb{A} \oplus \Omega$ داریم

$$\begin{aligned} \langle (\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega})^*((a, \omega).e), (a', \omega') \rangle &= \langle (a, \omega).e, \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a', \omega') \rangle \\ &= \langle e, \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a', \omega').(a, \omega) \rangle \\ &= \langle e, \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}((a', \omega') \bullet_{\mathbb{A} \oplus \Omega} (a, \omega)) \rangle - \langle e, (a', \omega').\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a, \omega) \rangle \\ &= \langle (\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega})^*(e), (a', \omega') \bullet_{\mathbb{A} \oplus \Omega} (a, \omega) \rangle - \langle \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a, \omega), e.(a', \omega') \rangle \\ &= \langle (a, \omega) \bullet_{\mathbb{A} \oplus \Omega} (\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega})^*(e), (a', \omega') \rangle - (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a', \omega') \langle e, \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a, \omega) \rangle. \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم

$$(\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega})^*((a, \omega).e) = (a, \omega) \bullet_{\mathbb{A} \oplus \Omega} (\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega})^*(e) - (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a, \omega) \langle e, \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a, \omega) \rangle. \quad (۵.۳)$$

با استفاده از روابط (۵.۳) و (۳.۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \langle e, t.(a, \omega) \rangle &= \langle e, \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega} \circ \pi(\mathcal{M}).(a, \omega) \rangle \\ &= \langle (a, \omega).e, \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega} \circ \pi(\mathcal{M}) \rangle \\ &= \langle (\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega})^*((a, \omega).e), \pi(\mathcal{M}) \rangle \\ &= \langle (a, \omega) \bullet_{\mathbb{A} \oplus \Omega} (\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega})^*(e) - (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}, \circ) \langle e, \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a, \omega) \rangle, \pi(\mathcal{M}) \rangle \\ &= \langle \pi(\mathcal{M}) \bullet_{\mathbb{A} \oplus \Omega} (a, \omega), (\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega})^*(e) \rangle - \langle \pi(\mathcal{M}), (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{B}}, \circ) \rangle \langle e, \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a, \omega) \rangle \\ &= (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a, \omega) \langle \pi(\mathcal{M}), (\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega})^*(e) \rangle - \langle e, \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a, \omega) \rangle \\ &= (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a, \omega) \langle \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega} \circ \pi(\mathcal{M}), e \rangle - \langle e, \mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a, \omega) \rangle. \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از رابطه (۴.۳)، داریم

$$\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}(a, \omega) = (\psi_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A}}, \circ)(a, \omega).t - t.(a, \omega) = (a, \omega).t - t.(a, \omega).$$

□

ازاین‌رو $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{A} \oplus \Omega}$ درونی خواهد بود.

با استفاده از قضیه ۲.۳ و [۶، قضیه ۲.۴]، نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۳.۳. فرض کنید $\mathbb{A}$ جبر باناخ دوگان با پیش‌دوگان $\mathbb{A}^*$ باشد. فرض کنید Ω ، $\mathbb{A}$ -دومدول باناخ نرمال با پیش‌دوگان شبه یکانی Ω_* باشد. آنگاه $\mathbb{A} \oplus \Omega$ ، $(id, \circ)$ -کان میانگین‌پذیر $\mathbb{U}$ -دومدولی است اگر و فقط اگر $\mathbb{A}$ ، id -کان میانگین‌پذیر $\mathbb{U}$ -دومدولی باشد.

□

اثبات. هم‌ارزی موردنظر به‌طور مستقیم از قضیه ۲.۳ به دست می‌آید.

References

- [1] Amini, M. (2004). Module amenability for semigroup algebras. *Semigroup Forum*, 69, 243–254. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00233-004-0107-3>.
- [2] Amini, M. (2015). Module Connes amenability of hypergroup measure algebras. *Open Math*, 13, 737–756. DOI: <https://doi.org/10.1515/math-2015-0070>.
- [3] Dales, H.G., Ghahramani, F., & Gronbaek, N. (1998). Derivations into iterated duals of Banach algebras. *Studia Math*, MR 99g:46064, 128, 19–54.
- [4] Ebrahimi Vishki H.R., & Khoddami, A. R. (2011). Character inner amenability of certain Banach algebras. *Colloquium Mathematicum*, 122, 225–232. DOI: <https://doi.org/10.4064/cm122-2-7>.
- [5] Ghaffari, A., & Javadi, S. (2017). φ -Connes amenability of dual Banach algebras. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 43(1), 25–39.
- [6] Ghaffari, A., Javadi, S., & Tamimi, E. (2022). Connes Amenability for Certain Product of Banach Algebras. *Wavelets and Linear Algebra*, 9(1), 1–14.
- [7] Ghaffari, A., Javadi, S., & Tamimi, E. (2022). Connes amenability of l^1 -Munn algebras. *Tamkang Journal of Mathematics*, 53(3), 259–266. DOI: <https://doi.org/10.5556/j.tkjm.53.2022.3554>.
- [8] Kaniuth, E., Lau, A.T., & Pym, J. (2008). On φ -amenability of Banach algebras. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc*, 144(1), 85–96. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0305004107000874>.
- [9] Lau, A.T. (1983). Analysis on a class of Banach algebras with applications to harmonic analysis on locally compact groups and semigroups. *Fund. Math*, 118, 161–175. DOI: <http://eudml.org/doc/211382>.
- [10] Monfared, M.S. (2007). On certain products of Banach algebras with applications to harmonic analysis. *Studia Math*, 178, 277–294.
- [11] Runde, V. (2001). Amenability for dual Banach algebras. *Studia Math*, 148(1), 47–66.
- [12] Runde, V. (2003). Connes amenability and normal virtual diagonals for measure algebras I. *J. Lond. Math. Soc*, 67(3), 643–656. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0111226>.
- [13] Runde, V. (2003). Connes amenability and normal virtual diagonals for measure algebras II. *Bull. Aust. Math. Soc*, 68(2), 325–328. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972700037709>.

- [14] Runde, V. (2004). Dual Banach algebras: Connes amenability, normal, virtual diagonals, and injectivity of the predual bimodule. *Math. Scand*, 95(1), 124–144. DOI: <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-14452>.
- [15] Runde, V. (2002). Lectures on amenability, Lecture Notes in Mathematics. *Springer- Verlag, Berlin*.
- [16] Tamimi, E., & Ghaffari, A. (Published online: 9 June 2024). A Survey on χ -module Connes amenability of semigroup algebras. *Journal of Algebraic Systems*, DOI: <https://doi.org/10.22044/jas.2023.12900.1702>.
- [17] Tamimi, E., & Ghaffari, A. (2024). On $\chi \otimes \eta$ -strong Connes amenability of certain dual Banach algebras. *J. Korean Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure Appl. Math*, 31(1), 1–19. DOI: <https://doi.org/10.7468/jksmeb.2024.31.1.1>.
- [18] Tamimi, E., & Ghaffari, A. (2023). Module Connes amenability for projective tensor product and Θ -Lau product of Banach algebras. *Mathematical Analysis and Convex Optimization (MACO)*, 4(2), 19–30.
- [19] Zhang, Y. (2002). Weak amenability of module extensions of Banach algebras. *Trans. Amer. Math. Soc*, 354, 4131–4151.